Ablauf

PDE-MODELL

GITTERGENERIERUNG

ZEITABHÄNGIGKEIT/
NICHTLINEARITÄT

ADAPTIV
VERFEINERUNG

DISKRETISIERUNG (ORT)
LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM

LÖSEN

FEHLERSCHÄTZEN

Komplexität der Gittergenerierung + Lösens „dominieren“

Lösen läßt sich automatisieren, Generierung "nur einmal"

⇒ $\boxed{\text{Schnelle Lösung wesentliches Problem}}$

Hierbei sollte aber klar sein, dass man eigentlich eine PDE lösen will!

⇒ Diskretisierungsfehler etc auch hier relevant!

Zusammenfassung / Wiederholung Mehrgitter

Klassische Iteration $\boxed{Ax = b}$ A regulär

$$\Phi : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$$

$$(x, b) \to \Phi(x, b)$$

$$\boxed{x_{m+1} \leftarrow \Phi(x_m, b)}$$

Fixpunkte: $x^* \leftarrow \Phi(x^*, b)$

1. Normalform $\Phi(x, b) = Mx + Nb$

$\boxed{\rho(M) < 1}$ „linear in x und b"

$\boxed{M = \text{Iterationsmatrix von } \Phi}$

2. Normalform $Ax_* = b \Rightarrow$

Lösung

$$\Phi(x_m, b) = Mx_m + Nb = Mx_m + NAx_*$$

Im Fixpunkt x_* gilt $\Phi(x_*, b) = x_*$

$\Rightarrow \mathbb{1} = M + N \cdot A \leadsto \boxed{M = \mathbb{1} - NA}$

$$\Phi(x_m, b) = x_m - N(Ax_m - b)$$

3. Normalform $W(x_m - x_{m+1}) = Ax_m - b$

für W regulär gilt $\boxed{W^{-1} = N}$

$$\boxed{N \approx A^{-1} \qquad W \approx A^{+1}}$$

Richardson: $W = 1/\omega \cdot \mathbb{1}$

Jacobi: $W = D$ $\quad (A = D - L - R)$

Gauß-Seidel: $W = D - L$

SOR: $W = 1/\omega \, (D - \omega L)$

Richardson $\quad M = \mathbb{1} - \omega A \implies$

Spektrum $(M) \sim$ Spektrum (A)

Daher für „Analysen" häufig!

Jacobi bei uniformen Gittern / Konstante Koeffizienten

$$A =_* \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & a_{ii} & * \\ * & * & * \end{bmatrix} \implies a_{ii} = \text{const} \implies$$

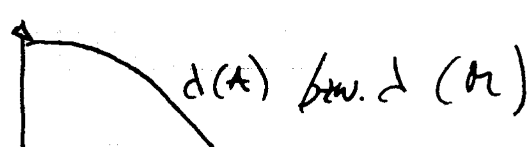
Jacobi $\approx$ Richardson $\quad \omega = 1/a_{ii} = 1/c$

M und A haben gleiche Eigenvektoren

und es erfüllen die Eigenwerte $\boxed{\lambda_M = 1 - \omega \lambda_A}$

$\implies \quad M^k x_0$ „leicht" bestimmbar

$\implies \quad$ „Kontraktionsradius" durch Eigenwerte von A



Reduktionsrate ist abhängig von „Kriterien“

in jedem Eigenraum „anders“

Startwertwahl $\nearrow$ bereits "Vorbesserung" ?

$\Rightarrow$ In welchen Eigenräumen ist die Reduktion gut?

$\Rightarrow$ S

3

Eigenwerte A_h aus PDE-Diskretisierung (FEM)

$\lambda_{min}(A_h) \geq C^{-1}$ $\lambda_{max}(A_h) \leq C \cdot h^{-2}$

(große Eigenwerte „wachsen", verschlechtern Kondition)

„**gute Glättung**" Hierzu gehören die oszillierenden Eigenfunktionen, d.h. $\|v_h\|_1 \gg \|v_h\|_0$.

Auf einem Teil des Spektrums Reduktion unabhängig von h.

Komplement Verwende eine zweite „Iteration", um dort h-unabhängig Fehler zu reduzieren.
($\hookrightarrow$ Eigenfunktionen zu „kleinen" Eigenwerten)
„glatte Eigenfunktionen"
$\Rightarrow$ gröbere Diskretisierung „ausreichend"

Konvergenz: Glättungseigenschaft: $\| S^\nu v_h \|_X \leq C h^{-\beta} \left(\frac{1}{\nu}\right)^\beta \|v_h\|_Y$

Approximationseigenschaft: $\|v_h - v_{2h}\|_Y \leq C h^\beta \|v_h\|_X$

X feinere Topologie als Y (X „kleiner" als Y)
(Glättungseigenschaft „inverse" Ungleichung)

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Wie glatt ist der Fehler?}\\ \text{Wie groß ist der Fehler?}\end{array}}$$

Zwei-Gitter-Verfahren

0.) $A_h u_h^k = f_h$ $\qquad$ u_h^k aktuelle Iterierte

1.) Glättung: $\qquad S: S_h \times S_h' \longrightarrow S_h$

$$(u_h^k, f_h) \longrightarrow u_h^{k+1/2 \cdot 1/\nu}$$

$\Rightarrow$ Nach ν-Glättungen $u_h^{k+1/2}$

2.) Grobgitter-Korrektur:

Löse verbleibendes Variationsproblem

$$J(u_h^{k+1/2} + V_H) \longrightarrow \min\{S_H \subsetneq S_h\}$$

$$u_h^{k+1} = u_h^{k+1/2} + \bar{V}_H \qquad (H = 2\cdot h)$$

Grobgitter-Korrektur

Für $S_H \subset S_h$ gilt es die Inklusion $i: S_H \hookrightarrow S_h$, damit Matrixdarstellung P_H^h gilt:

Galerkin-Identität

$$A_H = R_h^H A_h P_H^h \qquad R_h^H = (P_H^h)^T$$

Mit dem Defekt

$$(d_h, w_h) = (f, w_h) - a(u_h^{k+1/2}, w_h)$$

ist jetzt zu lösen

$$\boxed{R_h^H A_h P_H^h \bar{V}_H = R_h^H d_h}$$

Matrix-Schreibweise

$$u_{k+1} - u = M\,(u_k - u)$$

$$M = S^{\nu_2}\,(\mathbb{1} - P A_G^{-1} R A_F)\, S^{\nu_1}$$

$$= S^{\nu_2}\,(A_F^{-1} - P A_G^{-1} R)\, A_F\, S^{\nu_1}$$

$\Rightarrow \quad \rho(M) < 1$ für Konvergenz

Ziel: $\rho(M) \le c < 1$ mit c unabhängig von h/N

$(\ast)_S \quad \Rightarrow \|A_F S^{\nu_1}\| \le c/\nu \cdot h^{-2}$

$(\ast)_A \quad \| A_F^{-1} - P A_G^{-1} R\| \le c \cdot h^2$

$\Big\} \quad \rho(M) \le c/\nu$ (falls $\|S\| \le 1$) konvergente Iteration

Mit $\|Ax\| =: |||x|||_2$ also

$(\ast)_S' \quad ||| S^{\nu_1} |||_2 \le c/\nu \cdot h^{-2}$

$(\ast)_A \quad \| v - u_G \|_0 \le c \cdot 2h \cdot \|v - u_G\|_1 \le c \cdot 2h^2\, |||v|||_2$

$v = A_F^{-1} d \qquad u_G = P A_G^{-1} R b \qquad L^2$-Stabilität

Inklusion!

$|||v|||_2 = \|d\|$

$$\Rightarrow \| (A_F^{-1} - P A_G^{-1} R)\, d \| \le c \cdot 2 \cdot h^2 \|d\|$$

$$\leadsto (\ast_S) + (\ast_A) = (\ast_S) + (\ast_A)$$

Konvergenz des 2-Gitter-Verfahrens

i) klassische Fehlerabschätzung $\|u - v_h\|_m \le c \cdot h^{t-m} \cdot \|u\|_t$

jetzt aber „$u \in S_h$" „$v_h \in S_H$" $\Rightarrow u, v_h \in C^0$

Wenig klassische Glattheit + Fehlerabschätzung „wertlos"

ii) klassische Glattheit $\approx$ (höhere) Ableitungen $\approx$ Differential Operator (Potenzen) $\approx$ Steifigkeitsmatrix (Potenzen)

iii) Basiswahl Koeffizienten „=" Funktionen

$$|||x|||_s := (x, A^s x)^{1/2} = \|A^{s/2} x\|$$ spd

Für $s = 0, 1$ äquivalente Normen zu H^s-Norm!

$\underline{\underline{s=0}}$ L^2-Stabilität der nodalen Basis

$\underline{\underline{s=1}}$ H^1-Elliptizität von $a(\cdot,\cdot)$

Glättungseigenschaft

$$\lambda_{max}(A) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{(x, Ax)}{(x,x)} = \sup \frac{|||v_h|||_1^2}{|||v_h|||_0^2} \le \sup_{v_h \in S_h} \frac{\|v_h\|_1^2}{\|v_h\|_0^2}$$

$\boxed{\text{Inverse Ungleichung}}$ $\|v_h\|_1 \le c \cdot h^{-1} \|v_h\|_0 \quad v_h \in S_h$

$$\Rightarrow \lambda_{max}(A_h) \le C_1 \cdot h^{-2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\kappa(A_h) \le c^2 h^2}}$$

$$\lambda_{min}(A_h) = \inf \frac{(x, Ax)}{(x,x)} \ge C_1^{-1}$$

⊕ weitere Eigenschaften von $|||\cdot|||_s$ -

$|||x^K||| \le C_1 \frac{1}{K} \cdot h^{-2} |||x^0|||$ Richardson mit

Approximationseigenschaft (volle Regularität)

$$a(u_H - v_h, w_H) = 0 \qquad \forall w_H \in S_H \qquad (H = 2h)$$

dann gilt
$$\|u_H - v_h\|_1 \le c \cdot 2h \cdot |||v_h|||_2$$
$$\|u_H - v_h\|_0 \le c \cdot 2h \cdot \|u_H - v_h\|_1$$

$v_h \in C^0 \quad v_h \in H^1 \Rightarrow$ Aubin-Nitsche in S_H $(H = 2h)$

$$\|u_H - v_h\|_0 \le c \cdot 2h \cdot \|u_H - v_h\|_1$$

Galerkin-Orthogonalität, log Konvexität der $|||\cdot|||_s$-Skala, Ellip.

$$\|u_H - v_h\|_1 \le c/\alpha \cdot 2h \cdot |||v|||_2$$

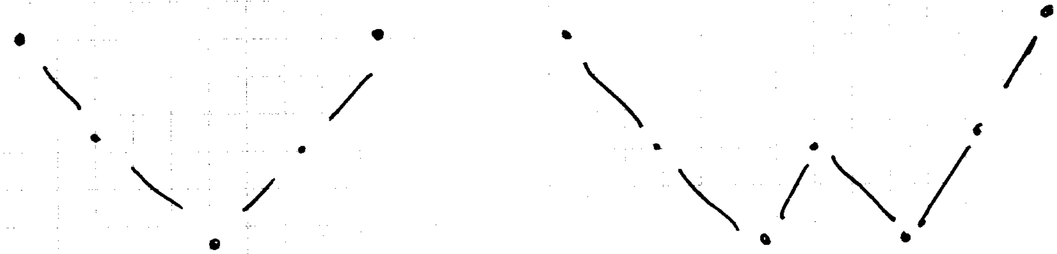
Mehrgitter

Immer Approximationen an exakte Grobgitter-Korrektur
im Zwei-Gitter-Verfahren $\Rightarrow$ ähnliche Schranke

$\Rightarrow$ "Vergleich der jeweiligen Korrektur mit der exakten"

$\rightsquigarrow$ Rekursionsformeln für MG-Raten (abh. von ZG-Rate)

$\rightsquigarrow$ Falls ZG-Rate klein genug ✓



V-Zyklus | W-Zyklus

Kontraktionszahl der Mehrgitter-Iteration ist unabhängig von h kleiner als 1 $\Rightarrow$

$$\|u_{k,l} - u_{*,l}\| \le \rho \, \|u_{k-1,l} - u_{*,l}\|$$

$$\le \rho^k \, \|u_{0,l} - u_{*,l}\| \qquad \forall k, \ \forall l$$

Iteration Level

Diskretisierungsfehler sei

$$\|u_{*,l} - u\|_V \le c \cdot \underbrace{2^{-l}}_{h}{}^{\cdot p} \, \|u\|_W$$

Diskrete Lsg — Analy. Lsg — h — Glattheit von u, Diskr. grad

Startwert $u_{0,l} = P^l_{l-1} \, u_{m_{l-1}, l-1}$ wobei

$$\|u_{m_{l-1}, l-1} - u\| \overset{!}{\le} c \cdot 2^{-(l-1)\cdot p} \, \|u\|_W$$

$$\|u_{k,l} - u\| \le \|u_{k,l} - u_{*,l}\| + \|u_{*,l} - u\|$$

$$\le \rho^k \, \|u_{0,l} - u_{*,l}\| + \|u_{*,l} - u\|$$

$$\le \rho^k \cdot \|u_{0,l} - u_{*,l}\| + c 2^{-l p} \|u\|_W$$

$$\le \rho^k \cdot \|P^l_{l-1} u_{m_{l-1},l-1} - u_{*,l}\| + c \cdot 2^{-l p} \|u\|_W$$

$$\le \rho^k \left(\|P^l_{l-1} u_{m_{l-1},l-1} - u_{*,l-1}\| + \|u_{*,l-1} - u\| + \|u_{*,l} - u\| \right)$$

$$+ c 2^{-l p} \|u\|_W$$