Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010
Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Dienstag, 02.02.2010**.

Aufgabe 1. Das reine Neumann-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= g \quad auf\partial\Omega \end{aligned}$$

ist nur lösbar, wenn die Verträglichkeitsbedingung

$$\int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, ds = 0$$

erfüllt ist. Da für eine Lösung u auch $u + c$ mit einer Konstanten c eine Lösung ist, kann man die Nebenbedingung

$$\int_\Omega u \, dx = 0$$

fordern. Stellen Sie das zugehörige Sattelpunktsproblem auf zeigen Sie, dass die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ V-elliptisch ist und die Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$ die inf-sup-Bedingung erfüllt.
Hinweis: Spursatz, Poincar'e Ungleichung

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die verschärfte Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$(\nabla v_h, \eta_h) \leq \sqrt{1-\beta^2} \|\nabla v_h\|_0 \, \|\eta_h\|_0 \quad \text{für } v_h \in M_h, \eta_h \in \tilde{E}_h$$

zu der Elliptizitätsaussage

$$\int_\Omega (\nabla v_h + \eta_h)^2 \, dx \geq (1-\beta)(|v_h|_1^2 + \|\eta_h\|_0^2) \quad \text{für } v_h \in M_h, \eta_h \in \tilde{E}_h$$

äquivalent ist.