Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010

Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Dienstag, 19.01.2010**.

Aufgabe 1. Man zeige die Greensche Formel

$$\int_\Omega \tau : Dv dx = -\int_\Omega \mathrm{div}\tau \cdot v dx + \int_{\partial\Omega} v \cdot \tau n dx$$

für symmetrische Tensoren zweiter Stufe $\tau \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ und $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie für $\phi \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ die Gleichung

$$\mathrm{div}\,\mathrm{cof} D\phi \equiv 0,$$

wobei $\mathrm{cof}(A) = \det(A)A^{-T}$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass für den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor gilt:

$$T(x)^T = D\phi(x)^{-1}T(x)D\phi(x)^T.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für Funktionen $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \epsilon(v) : \epsilon(v) dc \geq \|v\|_{1,2}^2.$$

Zusatzaufgabe 1. Man zeige, dass

$$\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} | \det F > 0\}$$

keine konvexe Menge ist.
Hinweis: Man betrachte Konvexkombinationen geeigneter Diagonalmatrizen.

Zusatzaufgabe 2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit der Eigenschaft $(\nabla\phi)^T\nabla\phi = I_n$. Zeigen Sie, dass es dann ein $b \in \mathbb{R}^n$ und eine Matrix $R \in O(n)$ gibt mit $\phi(x) = b + Rx$ für alle $x \in \Omega$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst die Aussagen:

1. ϕ ist lokal eine Isometrie, d.h. zu jedem $x_0 \in \Omega$ gibt es eine Umgebung $V \subset \Omega$ mit $|\phi(x) - \phi(y)| = |x - y|$ für alle $x, y \in V$.
2. $\nabla\phi$ ist (lokal) konstant und orthogonal. Betrachten Sie dazu

$$F(x, y) := (\phi_k(y) - \phi_k(x))^2 - (y_k - x_k)^2$$

und bestimmen Sie $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_i}F(x, y)$.