



Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010
Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos



Übungsblatt 9.

Abgabe am **Dienstag, 22.12.2009.**

Aufgabe 1. Man zeige für $s = 0$ und $s = 1$

$$\|v\|_{s,\Omega}^2 = \|v\|_{s-1,\Omega}^2 \|v\|_{s+1,\Omega}^2$$

Aufgabe 2. Seien V und W Unterräume eines reellen Hilbert-Raums H . Die orthogonale Projektion auf V und W sei mit P_V bzw. P_W bezeichnet. Man zeige die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. $\langle v, w \rangle \leq \gamma \|v\| \|w\|$ gilt für alle $v \in V, w \in W$ mit $\gamma < 1$.
2. $\|P_W v\| \leq \gamma \|v\|$ gilt für alle $v \in V$.
3. $\|P_V w\| \leq \gamma \|w\|$ gilt für alle $w \in W$.
4. $\|v + w\| \geq \sqrt{1 - \gamma^2} \|v\|$ gilt für alle $v \in V, w \in W$.
5. $\|v + w\| \geq \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \gamma)} (\|v\| + \|w\|)$ gilt für alle $v \in V, w \in W$.

Aufgabe 3. Für die Iteration des Zweigitter-Algorithmus ist die Iterationsmatrix

$$M = S^{\nu_2} (I - p A_{2h}^{-1} r A_h) S^{\nu_1}$$

gennant. Man zeige, dass der Spektralradius von M nur von der Summe $\nu_1 + \nu_2$ abhängt und nicht davon, wie viele Glättungen man a priori und wie viele man a posteriori durchführt. Gilt das auch bei mehreren Ebenen?

Aufgabe 4. Man zeige für den W -Zyklus

$$\sup_l \rho_l^2 \leq \frac{\rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1, \quad \text{sofern } \rho_1 < \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ist}$$

Hinweis: Man leite aus der Rekursionsformel

$$\rho_l^2 \leq \rho_1^2 + \rho_{l-1}^{2\mu} (1 - \rho_1^2)$$

für die Konvergenzrate des V -Zyklus ($\mu = 1$) bzw des W -Zyklus ($\mu = 2$) auf Level l bzgl der Energienorm eine Rekursionsformel für $1 - \rho_l^2$ her. Hier bezeichnet ρ_1 die Zweigitter-Rate.