# Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010


Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

universitätbonn


## Übungsblatt 8.

Abgabe am **Dienstag, 15.12.2009**.

**Aufgabe 1.** Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^3$ mit glattem Rand und $\nu$ die äußere Normale an $\partial\Omega$. Ferner sei die Rotation eines Vektorfeldes $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ definiert als

$$\operatorname{rot} u = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix}.$$

Man zeige folgende Aussagen:

a) Für $u \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \operatorname{grad}\operatorname{div} u - \Delta u$$

insbesondere gilt

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = -\Delta u,$$

falls $u$ divergenzfrei ist.

b) Für $u \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ und $v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$

$$-\int_\Omega (\operatorname{div} u) v = \int_\Omega u \nabla v,$$

falls $u \cdot \nu v = 0$ auf $\partial\Omega$.

c) Für $u, v \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$

$$\int_\Omega (\operatorname{rot} u) v = \int_\Omega u (\operatorname{rot} v),$$

falls $u, v, \nu$ linear abhängig auf $\partial\Omega$ sind, insbesondere falls $u \times \nu = 0$ auf $\partial\Omega$.

(0 Punkte)

**Aufgabe 2.** Es sei $\Omega \in \mathbb{R}^2$ eine zusammenhängende, endliche Vereinigung von Quadern und $\Gamma_D$ eine Quaderseite enthalten in $\partial\Omega$. Man betrachte das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}\partial_i u) + au &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \Gamma_D, \\ \nu_i a_{ij} \partial_j u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega - \Gamma_D, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$ und $a_{ij}, a$ meßbar und beschränkt sind. Weiter gelte $\sum a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ und $a(x) \geq -C > -\frac{c_0}{C_p}$ für $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit der Poincaré-Konstante $C_p$ aus der folgenden Ungleichung:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p(\Omega, \Gamma_D) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

die für $u \in H^{1,2}(\Omega)$ mit $u = 0$ auf $\Gamma_D$ erfüllt ist.
Man gebe eine schwache Formulierung des Problems (1) an und zeige die Existenz einer eindeutigen schwachen Lösung.

(0 Punkte)

**Aufgabe 3.** Es sei $R_0 := [0,1] \times [0,1]$ das Referenzrechteck. $\bar{a}_i, i = 0, \dots, 3$ bezeichne seine gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken. Eine Abbildung $F : R_0 \to \mathbb{R}^2$ heißt bilinear, wenn $F$ in jeder Variable separat affin ist, d.h. $F(x,y) := c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy$ mit $c_i \in \mathbb{R}^2$. Weiter seien $a_i$ die gegen den Uhrzeigersinn numerierten Ecken eines Vierecks $R$. Zeigen Sie:

i. Es gibt genau eine bilineare Abbildung $F$ mit $F(\bar{a}_i) = a_i$ für $i = 0, \dots, 3$. Stellen Sie $F$ als Konvexkombination ihrer Werte in den Knoten dar.

ii. $F$ blidet $R_0$ bijektiv auf $R$ ab genau dann, wenn $R$ konvex ist.

iii. $F$ ist genau dann linear, wenn $R$ ein Parallelogramm ist.

(0 Punkte)

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie die elliptische, aber nicht gleichmäßig elliptische Bilinearform

$$a(u,v) = \int_0^1 x^2 u' v' \,\mathrm{d}x$$

auf dem Intervall $[0,1]$. Zeigen Sie, dass das Problem

$$J[u] = \frac{1}{2} a(u,u) - \int_0^1 u \,\mathrm{d}x \to \min!$$

keine Lösung in $H_0^1(0,1)$ hat. Was ist die zugehörige gewöhnliche Differential Gleichung?

(0 Punkte)