Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010
Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

universitätbonn

Übungsblatt 7.

Abgabe am **Dienstag, 08.12.2009**.

Aufgabe 1. Ordnet man in einem Gauß-Seidel-Verfahren die Freiheitsgrade einmal aufsteigend und einmal entsprechend absteigend an, so definiert die Verkettung einer Gauß-Seidel-Iteration bezogen auf die aufsteigende Nummerierung mit einer auf die absteigende Nummerierung das so genannte SSOR (symmetric SOR)-Verfahren.
Zeigen Sie, dass für SSOR-Verfahren gilt:

$$W^{-1} = (2-\omega)\left(\frac{1}{\omega}D - F\right)^{-1}\left(\frac{1}{\omega}D\right)\left(\frac{1}{\omega}D - E\right)^{-1}$$

wobei W die Matrix der dritten Normalform ist und $A = D - E - F$ gelte.

Aufgabe 2. L_h sei die Matrix zu dem Poissionproblem $-\Delta u = 0$ auf $\Omega \subset \mathbb{R}$ $(d = 1)$ und $u = g$ auf $\partial\Omega$, Ω sei ein Würfelgebiet, U_h^0 Gitterinterpolation einer konvexen Funktion u^0 ($u^0 = g$ auf $\partial\Omega$) und der Startvektor einer Gauß-Seidel-Iteration.
Zeigen Sie, dass die Folge U_h^i aus dem Gauß-Seidel-Verfahren monoton gegen die Lösung U_h des diskreten Problems konvergiert. (Hinweis: Zeigen Sie, dass U_h^i "konvex" bleibt).

Programmieraufgabe 1. (Elementweise Assemblierung des linearen Gleichungssystems)

Assemblieren Sie elementweise die Steifigkeitsmatrix K und die rechte Seite $\hat{f}$ für das Modellproblem

$$-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) = f \text{ in } \Omega$$

- mit homogenen Dirichlet-Randdaten $u = 0$ auf $\partial\Omega$,
- mit inhomogenen Dirichlet-Randdaten $u = g$ auf $\partial\Omega$,
- mit gemischten inhomogenen Dirichlet/Neumann-Randdaten $u = g$ auf Γ_D und $\kappa\partial_n u = h$ auf $\Gamma_N = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$

auf Basis der implementierten Gitterdatenstruktur.
Betrachten Sie die Daten $\kappa = 1$, $f = 0$, $g_1 = 20\theta^2(\frac{\pi}{2} - \theta)^2$ bzw. $g_2 = 10\theta(\frac{pi}{2} - \theta)$ für $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und $g_i = 0$ sonst auf $\Omega = B_1(0)$ so, dass $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Bestimmen Sie die Normen der Fehler auf mindestens drei uniform verfeinerten Gittern.

Abgabe der Programmieraufgabe 22.12.2009