# Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010

Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

universitätbonn

## Übungsblatt 6.

Abgabe am **Dienstag, 01.12.2009**.

**Aufgabe 1.** Approximieren Sie das biharmonische Problem aus Aufgabe 3 von Blatt 2 mit finiten Elementen, so dass $V_h \subset H_0^{2,2}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ und $P_k \subset \hat{P}$. Zeigen Sie für die numerische Lösung $u_h \in V_h$ und $u \in H^{k+2,2}(\Omega)$ :

$$\|u - u_h\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq Ch^k \|u\|_{H^{k+2,2}(\Omega)}.$$

*Hinweis:* Betrachten Sie für $v = u - g$ Cea's Lemma.

**Aufgabe 2.** Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Dreieck. Man zeige für $\psi \in P_3(T)$ die Quadraturformel

$$\int_T \psi \, dx = \frac{|T|}{60}(3\sum_{i=0}^{2} \psi(a_i) + 8 \sum_{0 \leq i < j \leq 2} \psi(a_{ij}) + 27\psi(a_{012})),$$

wobei $a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}$ und $a_{012} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} a_i$. Weiter zeige man , dass dies nicht für alle Polynome aus $P_4(T)$ gilt.

Hinweis: Benutze, dass für ein Simplex $T \in \mathbb{R}^D$ mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_d)$ gilt:

$$\int_T \lambda^\alpha \, dx = \frac{\alpha! n!}{(|\alpha| + n)!}|T|,$$

wobei $\alpha$ ein Multiindex ist.

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie auf dem Einheitsdreieck $T_{\text{ref}}$ mit baryzentrischen Koordinaten $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$ für festes $k \in \mathbb{N}$ die Lagrangeknotenmenge vom Grad $k$, d.h. die Punkte $\{(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}, \frac{k-i-j}{k}) | 0 \leq i, j \leq k\}$. Bekanntlich sind dies $n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ verschiedene Punkte.

1. Zeigen Sie, dass je $n - 1$ dieser Punkte (also jeweils alle Punkte bis auf einen) auf $k$ Linien der Form

   $$L_i^s = \left\{ \lambda \in T_{\text{ref}} | \lambda_s = \frac{i}{k} \right\}, \, 0 \leq i \leq k, \, 0 \leq s \leq 2$$

   (also auf Parallelen zu den Kanten von $T_{\text{ref}}$) liegen.

2. Geben Sie daraus eine zu obigen Punkten nodale Basis von $P_k(T_{\text{reg}})$ in baryzentrischen Koordinaten an.

**Aufgabe 4.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit polygonalem, Lipschitz-stetigem Rand, $V := H_0^1(\Omega)$. Ferner seien eine $V$-elliptische, stetige Bilinearform $a$ und eine stetige Linearform $b$ gegeben. Die Aufgabe

$$u \in V : \quad a(u, v) = b(v) \quad \text{für alle } v \in V$$

werde unter Verwendung stetiger, stückweise linearer finiter Elemente diskretisiert.
Man zeige, dass die (auf den Träger $E_i$ der Standard-Basisfunktionen des Ansatzraumes $V_h$ bezegonen) abstrakten Fehlerindikatoren

$$\eta_i := \sup_{\substack{v \in H_0^1(E_i) \\ v \neq 0}} \frac{|a(e,v)|}{\|v\|}$$

(wobei $e = u - u_h$) unter Verwendung der Lösungen $e_i \in H_0^1(E_i)$ der jeweiligen lokalen Randwertprobleme

$$e_i \in H_0^1(E_i): \quad a(e_i, v) = b(v) - a(u_h, v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(E_i)$$

folgendermaßen abgeschätzt werden können ($M$ und $\alpha$ bezeichnen die jeweiligen Konstanten in der Stetigkeits- bzw. Elliptizitätsbedingung):

$$\alpha \|e_i\| \leq \eta_i \leq M \|e_i\|$$

Dabei werden im Bedarfsfall die Elemente aus $H_0^1(E_i)$ durch Null auf ganz $\Omega$ fortgesetzt.