Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010
Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Dienstag, 24.11.2009**.

Aufgabe 1. Sei M_h eine reguläre Triangulierung des Gebietes Ω und x_I ein innerer Knoten des Gitters und seien $T_1^I, \ldots T_k^I$ die Dreiecke am Knoten x_I. Dabei sei die Nummerierung so, dass x_I über Kanten des Gitters mit den Knoten $x_1^I, \ldots x_k^I$ verbunden ist und das Dreieck T_m^I durch die Knoten x_I, x_m^I, x_{m+1}^I gegeben ist Hierbei ist die Indizierung zyklisch, d.h. $x_{k+1}^I = x_1^I$.
Drücken Sie die Einträge der Standard-Steifigkeitsmatrix der x_I zugehörigen Spalte für lineare Finite Elemente mit Hilfe der Flächen der Dreiecke und der Vektoren $r_m^I := x_m^I - x_I$ sowie $l_m^I := x_{m+1}^I - x_m^I$ aus.

Aufgabe 2.

1. Sei $T_x = \text{conv}(p_0, p_1, p_2)$, $p_i \in \mathbb{R}^2$ ein Dreieck in kartesischen Koordinaten und $\hat{T}_\lambda$ das Referenz Dreieck in baryzentrischen Koordinaten. Zeigen Sie, dass die entsprechenden Koordinatentransformationen gegeben sind duch

$$A : T_x \to \hat{T}_\lambda, x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} (p_1 - p_0 | p_2 - p_0)^{-1} (x - p_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} : \hat{T}_\lambda \to T_x, \lambda \mapsto (p_1 - p_0 | p_2 - p_0) \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + p_0.$$

2. Betrachten Sie Lagrange-Elemente k-ter Ordnung im $\mathbb{R}^d$. Geben Sie eine Darstellung der lokalen Steifigkeitsmatrix in Termen von $\partial_{\lambda_j}\varphi$ und $\partial_{x_i}\lambda_j$ (φ FE-Basisfunktion in baryzentrischen Koordinaten, $i = 1, \ldots, d$ und $j = 0, \ldots, d$) an und schreiben Sie diese als $M \times M-$ Matrix ($M = \dim \mathcal{P}_k$).

3. Berechnen Sie die Matrix explizit für $d = 2, k = 2, a(x) = 1$.

   Erinnerung: Die Lagrangebasis ist gegeben durch

$$L_\alpha(\lambda(x)) = \prod_{l=0}^{d} \prod_{j=0}^{\alpha_l - 1} \frac{\lambda_l(x) - \frac{j}{k}}{\frac{\alpha_l}{k} - \frac{j}{k}} \text{ für } |\alpha| = k$$

Aufgabe 3. Betrachten Sie das folgende Problem auf $\Omega = (0, 1)$

$$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und zeigen Sie

$$\|u - u_h\|_{L^\infty} \leq C h^{k+1} |u|_{k+1,2},$$

wobei wie bisher h die Diskretisierungsfeinheit und k den Polynomgrad bezeichnet.

Hinweis: Für festes $x \in \Omega$ suche man eine Darstellung von $(u-u_h)(x)$ in der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$, d.h. $(u-u_h)(x) = a(u-u_h, G_x)$. Dabei ist $G_x(y) = G(x,y)$ die Greensche Funktion in 1D,

$$G(x,y) = (1-x)|y| + x|y-1| - |x-y|.$$

Desweiteren betrachte man das Lemma von Aubin-Nitsche.

Aufgabe 4. Wiederholen Sie the Berechnung von Modell Problem 4.3 (Braess, Seite 54) für eine Triangulierung mit unterschiedlichen Gitterweiten h_1 und h_2 in x bzw. y Richtung.
Was passiert wenn $\lambda := \frac{h_1}{h_2} \to 0$?
(*Hinweis:* Diese Diskretisierung ist *nicht konsistent*.)