Übungsblatt 4.

Abgabe am **Dienstag, 17.11.2009**.

Aufgabe 1. Man unterteile $[0,1]$ in $N+1=\frac{1}{h}$ äquidistante Teilintervalle $[(i-1)h, ih]$ und betrachte den Raum

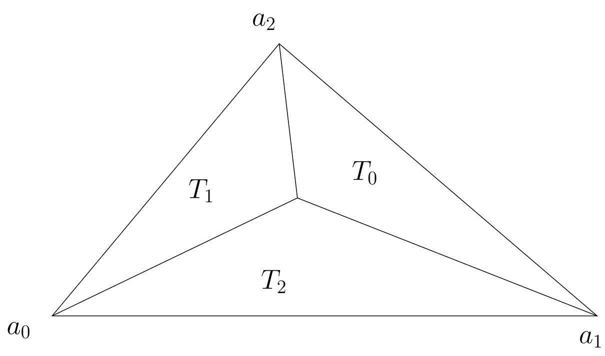
$$V_h := \{v_h \in C^0([0,1]) \,|\, v_h \text{ ist ein Polynom vom Grade } \leq 2$$
$$\text{auf jedem Teilintervall, mit } v_h(0) = v_h(1) = 0\}.$$

Es sei $v \in V_h$ die Interpolierende von u, wobei $u(0) = u(1) = 0$ und $u''' \in L^2(0,1)$. Die Interpolation sei an den Stellen ih und weiteren äquidistanten Zwischenstellen (jeweils eine für jedes Teilintervall) durchgeführt. Man beweise die folgende Interpolationsabschätzung

$$\inf_{v \in V_h} \|u' - v'\|_{L^2(0,1)} \leq Ch^2 \|u'''\|_{L^2(0,1)}$$

Aufgabe 2. Man unterteile $[0,1]$ in $N+1=\frac{1}{h}$ äquidistante Teilintervalle $[(i-1)h, ih]$. Für $f \in C^\infty([0,1])$ sei $I_h f$ die stückweise kubische Hermite-Interpolation (d.h. f wird so interpoliert, dass $I_h f$ kubisch auf jedem Intervall $[(i-1)h, ih]$ ist und $I_h f(ih) = f(ih)$, $(I_h f)'(ih) = f'(ih)$ für alle Stützstellen gilt). Man zeige, dass $I_h f \in H^2((0,1))$ gilt.

Aufgabe 3. Man betrachte folgendes Dreieck T



und den Raum

$$V = V(T) := \{\, p \in C^1(T) \,|\, p|_{T_j} \in P_3(T_j), \quad \text{für } j = 0,1,2;$$
$$\partial_\nu p \text{ ist affin auf den Randkanten von } T\,\}.$$

Man zeige, dass es genau eine Funktion aus V gibt, die beliebig vorgegebene Funktionswerte und Ableitungen in den Eckpunkten a_i für $i = 0,1,2$ annimmt.

Aufgabe 4. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *selbst-affin*, d.h. es existiert eine bijektive, affine Abbildung

$$F : \Omega \to \Omega$$
$$F\hat{x} = x_0 + B\hat{x}$$

mit einer invertierbaren Matrix B. Ferner sei $v \in H^m(\Omega)$ so, dass $v \circ F = \lambda v$ für ein festes $\lambda > 0$ gilt.

Leiten Sie eine obere Schranke für λ her, die nur von den *Spektralradien* $\rho(B)$ und $\rho(B^{-1})$, der Raumdimension d und m abhängt.

Hinweis: (Gelfand) Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gilt $\lim_{k\to\infty}\|B^k\|^{1/k} = \rho(B)$.