Wissenschaftliches Rechnen I (V2E3)

Wintersemester 2009/2010
Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Dienstag, 3.11.2009**.

Aufgabe 1. Zeigen Sie:

1. Für $u(x) = \tilde{u}(r(x), \varphi(x))$ mit $x = (r\sin(\varphi), r\cos(\varphi))$, gilt

$$\Delta u = \partial_r^2 \tilde{u} + \frac{1}{r}\partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 \tilde{u}.$$

   (Laplace in Polarkoordinaten)

2. Für $\Phi \in (0, 2\pi]$ erfüllt $u(x) = r^{\frac{\pi}{\Phi}} \sin(\varphi \frac{\pi}{\Phi})$ die Gleichung

$$-\Delta u = 0 \text{ in } \Omega_\Phi = \{(r\sin(\varphi), r\cos(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 | r \in (0,1), \varphi \in (0, \Phi)\}$$

   und ist $C^2(\Omega_\Phi) \cap C^0(\overline{\Omega_\Phi})$.

Aufgabe 2. Sei $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ und $g : \partial B_1(0) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\varphi) + b_k \sin(k\varphi)).$$

Bestimmen Sie die Lösung von $\Delta u = 0$ in $B_1(0)$ mit den Randwerten

$$\partial_r u(x) = g(x) \text{ for } x \in \partial B_1(0).$$

Aufgabe 3. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^d$ ein offenes Gebiet. Betrachten Sie die biharmonische Gleichung:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= f && \text{in } \Omega \\ u &= r && \text{auf } \partial\Omega \\ \partial_n u &= \gamma && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dabei sei $\Delta^2 = \Delta\Delta$. Zeigen Sie, dass eine glatte Funktion $u \in C^4(\overline{\Omega})$ genau dann Lösung ist, wenn Sie die Randbedingungen und die folgende schwache Formulierung erfüllt:

$$\int_\Omega \Delta u \, \Delta\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^{2,2}(\Omega).$$

Aufgabe 4. Betrachten Sie das biharmonische Problem aus Aufgabe 3 mit konvexem polynomial berandetem Ω. Es existiere ein $g \in H^{2,2}(\Omega)$ mit $g = r$ und $\partial_n g = \gamma$ auf $\partial\Omega$. Sei $f \in L^2(\Omega)$. Zeigen Sie, dass eine eindeutige Lösung in $H^{2,2}(\Omega)$ existiert.

Hinweis: Betrachten Sie $v := u - g$ und verwenden Sie den Satz von Lax-Milgram. Für $\varphi \in H_0^{2,2}(\Omega)$ und $\partial\Omega \in C^{0,1}$, Ω konvex gilt: $\|\varphi\|_{H^{2,2}(\Omega)} \leq C\|\Delta\varphi\|_{L^2(\Omega)}$.