Wissenschaftliches Rechnen I
(V2E3)

Wintersemester 2009/2010
Priv.-Doz. Dr. Marc Alexander Schweitzer
Benjamin Berkels, Orestis Vantzos

Übungsblatt 1.

Abgabe am **Dienstag, 27.10.2009**.

Aufgabe 1. Man zeige, dass $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $H^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ liegt.
Hinweis: Faltung mit einer Dirac-Folge ϕ_ϵ, wobei $\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\phi(\frac{x}{\epsilon})$ und $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, \mathrm{d}x = 1$.

Aufgabe 2. (Poincaré Ungleichung)

Zeigen Sie, dass $|\cdot|_1$ und $\|\cdot\|_1$ auf dem Raum

$$\mathcal{H} := \{\varphi \in H^1(\Omega) \,|\, \textstyle\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}x = 0\}$$

äquivalente Normen sind.

Aufgabe 3. Zeigen Sie

$$\|x\|^s \in H^m(B_1(0)) \Leftrightarrow s > m - \frac{n}{2}.$$

Hierbei bezeichnet n die Raum-Dimension.

Aufgabe 4. Man zeige, dass die Folge

$$u_n(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n^2}}} - \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{n^2}}}$$

gegen den Grenzwert

$$u(x) = \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

bzgl. der H_0^1-Norm

$$\|v\|_{H_0^1} = \left(\int_0^1 (v'(x))^2 \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

konvergiert.