Finite Elemente:

i) basieren auf schwacher Form

ii) Variationsproblem: Lax-Milgram garantiert eindeutige Lösung, falls $|a(u,v)| \leq C_S \|u\|_V \cdot \|v\|_V$ (stetig) und $a(u,u) \geq C_E \|u\|_V^2$ (V-elliptisch).

Außerdem gilt $\|u\|_V \leq \frac{1}{C_E} \|f\|_{V'}$ — stabil

$$\|u\|_V = \|A^{-1} f\|_V$$

a-priori

iii) Approximationseigenschaften:

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad u_h \in V_h \subset V$$

a.) V-elliptisch $\Rightarrow$ V_h-elliptisch $\Rightarrow$ eindeutige Lösung u_h

b.) Céa-Lemma: $\|u - u_h\|_V \leq \frac{C_S}{C_E} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V$

Beweis + stetig + V-elliptisch

c.) Orthogonalität des Fehlers:

$$a(u - u_h, v_h) = f(v_h) - f(v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h$$

iv) Fehlerabschätzung:

H^1-Fehler: Céa, Bramble-Hilbert $\rightarrow$ Interpolation in H^1, (H^2-Regularität)

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \cdot h \, |u|_{H^2} \leq C \cdot h \, \|f\|_{L^2}$$

L^2-Fehler: H^1-Abschätzung, Aubin-Nitsche, H^2-Regularität

(auch L^2-Lifting genannt)

Lsg adj. Problem zu rhs g!

$$\|u - u_h\|_H \leq C \cdot \|u - u_h\|_V \cdot \sup_{g \neq 0} \frac{\inf_{v_h \in V_h} \|u_g^* - v_h\|_V}{\|g\|_H}$$

$V \hookrightarrow H$ stetig dicht, $a(\cdot,\cdot)$ V, V_h definiert

mit $V = H_0^1$, $H = L^2$ erhalten wir

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C \cdot \|u - u_h\|_{H^1} \cdot \sup_g \frac{\inf_{v_h} \|u_g^* - v_h\|_{H^1}}{\|g\|_{L^2}}$$

H^1-Abschätzung & H^2-Regularität des adjungierten Problems

<u>Dann gilt:</u>

$$\|u-u_h\|_V \le C \cdot \inf_{v_h \in V_h} \Bigg(\|u-v_h\|_V + \underbrace{\sup_{w_h \in V_h} \frac{|a(v_h,w_h) - a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|}}_{\|a(v_h,\cdot)-a_h(v_h,\cdot)\|_{V_h'}} \Bigg)$$

$$+ \underbrace{\sup_{w_h \in V_h} \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_V}}_{= \|f - f_h\|_{V_h'}}$$

$$\rightsquigarrow \|u-u_h\|_V \le C \cdot \inf_{v_h \in V_h} \left(\|u-v_h\|_V + \|a(v_h,\cdot) - a_h(v_h,\cdot)\|_{V_h'} + \|f-f_h\|_{V_h'} \right)$$

$\Rightarrow$ Für „einfachsten" Fall $\|f-f_h\|_{V_h'}$ mit $O(h)$ - Integration ausreichend.

<u>Beweis:</u> Stetigkeit, Elliptizität, Δ-Ungleichung

- „$V_h \not\subset V$, h-Normen!"
  $\rightarrow \sqrt{\sum_E \|v_h|_E\|^2_{V(E)}}$
- Bilinearform auf $V \oplus V_h$ definiert!

<u>2. Lemma:</u> wie oben aber $\underline{V_h \not\subset V}$ und $\underline{a_h : V_h \oplus V \times V_h} \to \mathbb{R}$ glm. stetig

$$\|u-u_h\|_V \le C \Bigg[\underbrace{\inf_{v_h \in V_h} \|u-v_h\|_{V_h}}_{\text{Approximationsfehler}} + \underbrace{\sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_h(u,w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_{V_h}}}_{\text{Konsistenzfehler}} \Bigg]$$

$\rightarrow$ Es gibt Varianten, welche diese Voraussetzung eliminiert.

<u>Anwendung:</u> i) Quadraturgenauigkeit für konformen Fall

ii) Randapproximationsgenauigkeit

$\rightarrow$ „Für einen C^2-Rand langt <u>quasi-uniforme</u> Triangulierung mit Knoten

„Arme Fall ... auf Rand ... Es gilt ... Strang oder beliebig?

Regularität: A) für homogenes Dirichletproblem zu einer H_0^1-elliptischen Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ mit "hinreichend" glatten Koeffizienten

i) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei konvex $\Rightarrow$ H^2-regulär

ii) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ habe C^s-Rand mit $s \geq 2$, dann ist das hom. Dirichletproblem H^s-regulär

iii) nicht konvexes Gebiet (mit einspringender Ecke)

$-\Delta u = 0 \quad \Omega$

$u = 0 \quad \Gamma_0$

$\Rightarrow u(r,\varphi) = r^{\pi/\beta} \sin\left(\frac{\pi \varphi}{\beta}\right)$

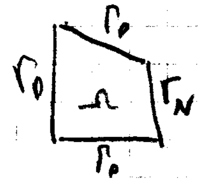
⇝ hat unbeschränkte Hessematrix für $\beta > \pi$

⇝ $u \notin H^2$ für $\beta > \pi$

⇝ nicht H^2-regulär

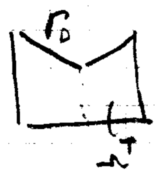
Regularität ist schwieriger für Probleme mit teilweise Neumann!

B) Teilweise Neumann (homogen)



$u_n = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_N$

habe Lsg $u(x,y)$ auf Ω

⇝ 

Ω_{SYM} hat Lsg $u_{SYM} = \begin{cases} u(x,y) & \Omega \\ u(-x,y) & \Omega^+ \end{cases}$

$\Rightarrow u_{SYM} \notin H^2$ von oben

$\Rightarrow u \notin H^2$

L^∞-Fehler: a) optimal (Scott, Rannacher)

- muß wohl sehr glatt sein?
- Es gibt wohl: $\leq h^2 |\log h|^{3/2} \cdot |D^2 u|_\infty$ in 2D, H^2-regulär.

$$\|u-u_h\|_{L^\infty} \leq h^2 \, |\log h| \, \|?\| \qquad 2D \leftarrow \text{Schärfer}$$

$$\leq h^2 \, |\log h|^{3/4+1} \, \|?\| \qquad d \geq 3$$

ist die hier!

b) einfach: inverse Stabilität, Bramble-Hilbert

$$\|u-u_h\|_{L^\infty} \leq c \cdot h \cdot |u|_{H^2} \leq c \cdot h \, \|f\|_{L^2}$$

v) Konformität: i) $V_h \not\subset V$ (Rand)

ii) $a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

nicht $a(\cdot,\cdot)$ und $f(\cdot)$, sondern eben approximiert, z.B. durch Quadratur $\to$ Punktauswertung $\to$ nicht auf ganz $V = H^1$ definiert.

$\Rightarrow$ Zusätzliche Konsistenzfehler im Céa-Lemma.

$\to$ $\tilde{A}_h = a_h(\cdot,\cdot) \qquad A_h = a(\cdot,\cdot)$

erbt nicht die V-Elliptizität & Stabilität!

erbt schon! $\Rightarrow$ glm. h-Elliptizität!

Lemmata von Strang um dies zu verallgemeinern!

Einfachstes Beispiel: $a(\cdot,\cdot)$ exakt aber $f(\cdot)$ nicht! tritt sogar wie immer auf!

- "$V_h \subset V$, aber
- a_h nicht auf V sondern nur V_h definiert" $\to$ "Pkt-auswertg bei num. quad in H^1."

1. Lemma: $a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in V$ und

$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \subset V$

mit (a) glm. Elliptizität und stetig in h:

$$a_h(v_h, v_h) \geq C_E \|v_h\|_V^2 \quad \forall v_h \in V_h \quad \forall h$$