1 Proseminar - Finite Elemente

1.1 Einführung in die Schwache Formulierung und die entsprechenden Funktionenräumen

1.1.1 Motivation

Lösung einer Differentialgleichung oder eines Minimierungspoblems Bsp.: Wärmeverteilung entlang eines Metallstabes, der am einen Ende gekühlt am anderen erhitzt wird; geschwungenes Seil

1.1.2 Idee

Approximation der Lösung durch Linearkombination endlich vieler Testfunktionen $\sum_i \varphi_i$ $\Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem Erwartungen an die Testfunktionen φ_i :

1. gut berechenbar und minimierbar

2. allgemein genug um sich jeder möglichen Lösungsfunktion anzunähern

1.1.3 Umsetzung

Zum Beispiel mit der Methode der Finiten Elemente
Wichtig: Beachten aus welchen Räumen die Test- und Lösungsfunktionen kommen Demonstration der einzelnen Schritte anhand des Sturm-Liouville-Problems:
u ist die gesuchte Lösung f ist gegeben, etwa die Messwerte p,q hängen vom jeweiligen Problem ab. Wir suchen also die Lösung u des Linearen Funktionals $Lu = f$. Der Funktionaloperator L entspricht hier dem Sturm-Liouville-Problem:

$-\frac{d}{dx}(p(x)\frac{du}{dx}) + q(x)u = f(x)$

mit folgenden Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(\pi) = 0$.

H^0 enthält alle Funktionen, die *finite Energie* haben:

$\|f\|^2 = \int_0^\pi (f(x))^2 dx < \infty$

H_B^2 enthält alle Funktionen, die selbst, sowie ihre ersten und zweiten Ableitungen *finite Energie* haben:

$\|f\|^2 = \int_0^\pi (f(x))^2 + (f'(x))^2 + (f''(x))^2 dx < \infty$

Wir haben $u \in H_B^2$ und $f \in H^0$, dass heißt das gesuchte L soll eine 1:1 Abbildung von dem einen Raum in den anderen sein:

L: $H_B^2 \to H^0$

Das Skalarprodukt für solche Räume ist wie folgt gegeben:

$\langle f, g\rangle_m = \sum_{a\leq m} \int_0^\pi f^{(a)}, g^{(a)} dx$

Zunächst wollen wir einmal das Prozedere der Approximation einer Lösungsfunktion u durchspielen.
Seien p und q konstant im Sturm-Liouville-Problem: $-(pu')' + qu = f$
Als Testfunktionen wählen wir die Eigenfunktionen:
$Lu_n = -pu_n'' + qu_n = \lambda u_n$
Testfunktionen:$u_n(x) = \sqrt{\frac{\Pi}{2}} \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)$ erfüllen die Randbedingungen:
$u_n(0) = u'_\Pi = 0$
die dazugehörigen Eigenwerte: $\lambda_n = p\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + q$
Vorteil: u_n orthonormal: $\int_0^\Pi u_n(x)\, u_m(x) = \delta_{nm}$

Wir nehmen an, dass auch f eine Linearkombination der u_n ist: $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n u_n$ wissen: $f \in H^0 \Rightarrow f$ hat finite Energie
$\int_0^\pi (f(x))^2 dx = \int_0^\pi (\sum_{n=0}^\infty a_n u_n^2) dx$
$= \int_0^\pi (\sum_{n,m=0}^\infty a_n u_n) dx$
$= \sum_{n,m=0}^\infty a_n a_m \int_0^\pi u_n u_m dx$ wegen Orthogonalität:
$= \sum_{n=0}^\infty a_n^2 < \infty$

Jetzt endlich: *Konstruktion* von u
$f = \sum a_n u_n;\ Lu = f;\ Lu_n = \lambda_n u_n$
Idee: $u = \sum b_n u_n$
$Lu = L(\sum b_n u_n) = \sum_{n=0}^N b_n \lambda_n u_n = \sum_{n=0}^\infty a_n u_n = f$
$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^N b_n \lambda_n = sum_{n=0}^N a_n u_n$
$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^N b_n u_n = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\lambda_n} u_n$
$\Rightarrow u = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\lambda_n} u_n$
Letzter Term existiert tatsächlich, da schon $\sum_{n=0}^\infty a_n^2 < \infty$ konvergiert.

Paradox: Es wird nur $f \in H^0$ gefodert, aber $f = lim_{N \to \infty} f_N$ ist Grenzwert von Funktionen aus H_B^2: $f_N = \sum_{n=0}^N a_n u_n \in H_B^2$.
Solange die Folge endlich ist, bleiben die Randbedingungen erhalten, gegen unendlich werden sie instabil.

Allgemeine Regel:

Bei Randbedingungen, die Ableitungen kleiner als s miteinbeziehen, macht es Sinn, die Lösungsfunktionen in H^s zu wählen. Lösungsfunktionen in H^s mit Bedingungen die Ordnungen s oder höher einbeziehen werden bei $N \to \infty$ instabil ($u = \sum_{n=0}^N a_n u_n^s(x)$).

1.1.4 Verbindung zum Minimierungsproblem

Wir wollen zeigen: Die Lösung der linearen Gleichung Lu=f entspricht der Lösung der des quadratischen Funktionals, einem Minimierungsproblem.
$I(v) = \langle Lv, v \rangle - 2\langle f, v \rangle$

Wir zeigen die Entsprechung exemplarisch im 1D-Fall: $I(v) = Lvv - 2fv \ \frac{dI}{dv}|_{v=u} = 2(Lu - f) = 0$ falls u minimiert Man sieht $\Leftrightarrow Lu = f$
(Achtung! Wir leiten hier nicht wie gewöhnlich ab, da v keine Variable wie bekannt ist, sondern eine Funktion!! D.h. wir behandeln hier Variationen!!)
D.h. die Lösung des Minimierungsproblems ist auch die Lösung der Differentialgleichung $Lu = f$

Aus den Eigenschaften eines Minimieres können wir einige wichtige Resultate folgern:
Sei u Minimierer von I, dann können wir uns aus jeder Richtung v nähern, sodass gilt:
$I(u) \leq I(u + \varepsilon v) = \langle L(u + \varepsilon v), u + \varepsilon v\rangle - 2\langle f, u + \varepsilon v\rangle$
$= I(u) + 2\varepsilon [\langle Lu, v\rangle - \langle f, v\rangle] + \varepsilon^2 \langle Lv, v\rangle$
ε beliebig gewählt werden, das heißt insbesondere negativ. Um die Ungleichung zu gewährleisten muss damit $\langle Lu, v\rangle - \langle f, v\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Lu, v\rangle = \langle f, v\rangle$ gelten.
Das entspricht der **Schwachen Formulierung**:
$\langle Lu, v\rangle = \langle f, v\rangle \ \ \forall \ v \in H$

1.1.5 Äquivalenz der Schwachen Formulierung zur Differentialgleichung

Jetzt zeigen wir, dass es genügt die Lösungsfunktion u über die schwache Formulierung zu suchen und dass die somit gefundene Lösung auch die geforderten Bedingungen erfüllt.
Ausführung an dem Sturm-Liouville-Problem:
$\langle f, v\rangle = \int_0^\pi f(x)v(x)dx$
$\langle Lu, v\rangle = \int_0^\pi [-(pv')' + qv]vdx$
$= \int_0^\pi -(pv')'dx + \int_0^\pi qv^2dx \qquad \rightarrow$ partielle Integration
$= -pv'v|_0^\pi + \int_0^\pi p(v')^2 + qv^2dx$
es gilt $-pv'v|_0^\pi = 0$ weil $v \in H_B^2 \ \rightarrow v'(\pi) = v(0) = 0$.

$\Longrightarrow I(v) = \int_0^\pi [p(x)(v'(x))^2 + q(x)v^2(x) - 2f(x)v(x)]dx$

In dieser Formulierung wird nur die erste Ableitung benötigt, es liegt also nahe in H_B^1 nach der Lösung zu suchen.
$\Longrightarrow$ Wir nähern uns mit Testfunktionen aus H_B^2 einem $v \in H_B^1$, wobei wir feststellen werden, dass wir nur eine der beiden Randbedingung für v fordern müssen und wenn v der Minimierer ist, er auch in H_B^2 liegen wird.
Wir suchen also v mit: $\int_0^\pi (v' - v_N')^2 - q(v - v_N)^2 \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$

Wenn wir $v_N(0) = 0$ fordern, bleibt dieser Randwert für v erhalten, da $v \in H^1$ (allgemeine Regel).
$v'(\pi)$ wird der Minimierer erfüllen:
Sei u Minimierer von I, dann können wir uns aus jeder Richtung v nähern, sodass gilt:
$I(u) \leq I(u + \varepsilon v) \ = I(u) + 2\varepsilon \int_0^\pi pu'v' + quv - fv + \varepsilon^2 \int_0^\pi p(v')^2 + qv^2$
$\Longleftrightarrow \int_0^\pi pu'v' + quv - fv = 0$ weil ε beliebig

$\Longleftrightarrow 0 = \langle Lu, v\rangle - \langle f, v\rangle$
$0 = \int_0^\pi pu'v' + quv - fv \rightarrow$ partielle Integration
$= pu'v|_0^\pi + \int_0^\pi -(pu')'v + quv - fv$
$\int_0^\pi [-pu')' + qu - f]v + p(\pi)u'(\pi)v(\pi)$
Damit dieser Ausdruck wirklich $= 0\ \forall v$, muss gelten

- $\int_0^\pi -pu')' + qu - f = 0 \Longleftrightarrow Lu = f$
- $p(\pi)u'(\pi)v(\pi) = 0 \Longleftrightarrow u'(0) = 0 \implies$ 2.Randbedingung

1.1.6 Zusammenfassung

1. Wir haben gezeigt, dass die Lösung des Minimierungsproblems auch die Differentialgleichung löst.
2. Die schwache Formulierung reicht aus, um die Lösung des Minimierungsproblems in H^1 zu finden.
3. Finden wir so die Lösung u, erfüllt sie zwingend auch die Randbedingungen und ist im besten Fall aus H^2

1.1.7 Bemerkung

Dass die so gefundenen Lösungen leider nicht immer optimal sind, dass heißt aus H^2, sind, zeigt das folgende Beispiel:
$p(x)$ im Sturm-Liouville-Problem könnte z.B. an einem Punkt x_0 nicht stetig sein. [Vgl. Wärmeleitfähigkeit eines Gegenstandes aus verschiedenen Materialien, z.B mit Holz- und Metallschichten]
Wir werden sehen, dass durch diese zusätzliche Bedingung u nicht zweimal differenzierbar ist, also $\notin H^2$.
Für u als Minimierer muss weiterhin gelten: $\int_0^\pi [-pu')' + qu - f]v = 0$
$\implies \int_0^{x_0} [-(pu')' + qu - f]v + p_- u'_- v_- +$

$\int_{x_0}^\pi [-(pu')' + qu - f]v + p(\pi)u'(\pi)v(\pi) - p_+ u'_+ v_+ = 0$ (partielle Integration)

u muss $Lu = f$ lösen
u muss Randbedingungen erfüllen
$p_- u'_- v_- = p_+ u'_+ v_+$, da $v_+ = v_- \Longleftrightarrow p_- u'_- = p_+ u'_+$
$\Rightarrow u'$ ist nicht stetig, da p nicht stetig in x_0
$\Rightarrow u \notin H^2$
Unsere Testfunktionen aus H^2 können u deshalb auch nicht mehr approximieren. D.h. wir müssen auch die Testfunktionen in H^1 wählen, um das Problem zu lösen. Dies muss man beachten, wenn auch innerhalb besondere Bedingungen und abweichende Punkte liegen.