1 Grundlagen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω offen mit stückweise glattem Rand.

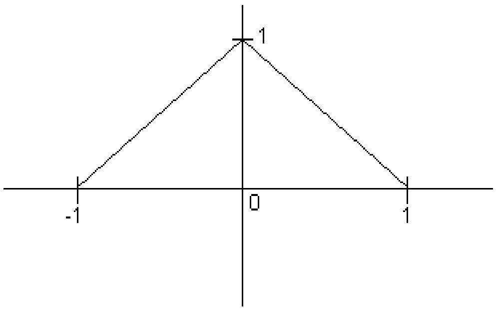
Definition 1.1. *Im $L_2(\Omega)$ wird durch das Skalarprodukt* : $(u,v)_0 := (u,v)_{L_2} = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$ *zusammen mit der Norm:* $\|u\|_0 := \sqrt{(u,u)_0}$ *ein Hilbertraum definiert.*

Definition 1.2. *: $u \in L_2(\Omega)$ besitzt eine schwache Ableitung $v := \partial^\alpha u$, falls $v \in L_2(\Omega)$ und*

$$(\Phi, v)_0 = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \Phi, u)_0 \qquad \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ gilt.}$$

Beispiel 1.1. *zur schwachen Ableitung $\varphi \notin C^1[-1,1]$ und*

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x < 0 \\ -1 \ , \ x \geq 0 \end{cases}$$



$\int\limits_{-1}^{1} \varphi'(x)\phi dx = (-1) \int\limits_{-1}^{1} \varphi \partial_x \phi dx \qquad \forall \phi \in C_0^\infty([-1,1])$
$\int\limits_{-1}^{1} \varphi\, \partial_x \phi dx = \int\limits_{-1}^{0} \varphi\, \partial_x \phi + \int\limits_{0}^{1} \varphi\, \partial_x \phi dx = [\varphi\, \phi]_{-1}^{0} - \int\limits_{-1}^{0} \varphi'(x)\phi dx + [\varphi\, \phi]_0^1 - \int\limits_{0}^{1} \varphi'(x)\phi dx = \varphi\, \phi(0) - \varphi\, \phi(0) - \int\limits_{-1}^{1} \varphi'(x)\phi dx = - \int\limits_{-1}^{1} \varphi'(x)\phi dx$

Definition 1.3. *Für $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $H^m(\Omega)$ die Menge aller Funktionen u in $L_2(\Omega)$, welche die schwachen Ableitungen $\partial^\alpha u \ \forall |\alpha| \leq m$ besitzen. Im $H^m(\Omega)$ wird durch $(u,v)_m := \sum\limits_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0$ ein Skalarprodukt erklärt.*

Norm : $\qquad \|u\|_m := \sqrt{(u,u)_m}$

Seminorm : $\quad |u|_m := \sqrt{\sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|^2_{L_2(\Omega)}}$

Satz 1.1. *Wenn Ω beshränkt ist, sind in $H_0^m(\Omega)$ die Normen $\|\cdot\|_m$ und $|\cdot|_m$ äquivalent. (Friedrich'sche Ungleichung - ohne Beweis)*

2 Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung

Motivation:

Beispiel 2.1. *: Betrachte* $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<1,\ x<0,\ \textit{oder}\ y>0\}$
$\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}, w(z) = z^{\frac{3}{2}}$ *ist analytisch in* Ω *und*

$$u(z) := Im(z) \text{ löst: } \begin{cases} \triangle u = 0 & \textit{in } \Omega \textit{ (harmonisch)} \\ u(e^{i\varphi}) = sin(\frac{2}{3}\varphi) & 0 \le \varphi \le \frac{3}{2}\pi \\ u=0 \quad sonst\,auf & \partial\Omega \end{cases}$$

wegen $w'(x) = z^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{2}{3}$ *sind nicht einmal die ersten Ableitungen von u für* $z \to 0$ *unbeschränkt, d.h. für die numerische Behandlung von Randwertaufgaben müssen wir einen anderen Weg einschlagen. Im folgenden werden wir die Variationsformulierung für elliptische Randwertaufgaben nutzen.*

Charakterisierungssatz: Sei V ein linearer Raum,

- $a: V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrisch, positive Bilinearform
- $l: V \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional
- $J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - \langle l, v \rangle$ nimmt in V bei u ein Minimum an
  $\Leftrightarrow a(u,v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in U \quad \exists!$ solche Minimallösung.

Beweis: siehe Skript Jenny und Carola.

Elliptische Randwertaufgabe und Dirichlet-Problem

Sei L ein elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung mit Divergenzstruktur:

$$\begin{aligned} Lu &:= -\sum_{i,k=1}^{n} \partial_i(a_{ik}\partial_k u) + a_0 u \qquad a_0(x) \ge 0 \text{ in } \Omega \\ &= -\bigtriangledown(A \bigtriangledown u) + a_0 u \qquad A \text{ pos definit.} \end{aligned}$$

Dirichlet Problem: $\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \text{u=g} & auf\partial\Omega \end{cases}$

transformiertes Dirichlet Problem: $\begin{cases} Lw = f_1 & \text{in } \Omega \\ \text{w=0} & auf\partial\Omega \end{cases} \qquad (*)$

setze $w := u - u_0$ mit $f_1 = f - Lu_0$, für zulässiges u_0 mit $u|_{\partial\Omega} = g$.

Satz 2.1. Minimaleigenschaft
Jede klassische Lösung der Randwertaufgabe (*) ist Lösung des Variationsproblems:

$$\text{für } v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \quad v|_{\partial\Omega} = 0 :$$
$$J(v) := \int\limits_\Omega \left[\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{ik} \partial_i v \partial_k v + \frac{1}{2} a_0 v^2 - fv \right] dx \longrightarrow min.!$$

Beweis. Nutze Green'sche Formel: $\int\limits_\Omega v \partial_i w dx = -\int\limits_\Omega \partial_i v w dx + \int\limits_{\partial\Omega} v w \nu_i ds$
Setze $w := a_{ik} \partial_k u$, merke $v|_{\partial\Omega} = 0$:

i) $\int\limits_\Omega v \partial_i (a_{ik} \partial_k u) dx = -\int\limits_\Omega a_{ik} \partial_i v \partial_k u dx$

ii) Setze $a(u,v) := \int\limits_\Omega \left[\sum\limits_{i,k} a_{ik} \partial_i u \partial_k v + a_0 uv \right] dx$, $< l, v > := \int\limits_\Omega f v dx$

$\forall v \in C^1 \cap C(\Omega) :\ a(u,v) - < l, v > \overset{i)}{=} \int\limits_\Omega v \left[-\sum\limits_{i,k} \partial_i (a_{ik} \partial_k u) + a_0 u - f \right] dx = \int\limits_\Omega v \left[Lu - f \right] dx =$ 0,
wenn u klassische Lösung ist. Aus dem Charakterisierungssatz folgt die Minimaleigenschaft.

□

Frage: Existenz solcher Lösungen?

Beispiel 2.2. *(Weierstrass 1870): für beschränkte $J(u)$ lässt sich zeigen, dass nicht immer Lösungen existieren :*

$$J(u) = \int\limits_0^1 u^2(t) dt$$

mit $u \in \{v \in C^0[0,1];\ v(0) = v(1) = 1\} \Rightarrow inf\,(J(u)) = 0$ aber $J(u) \neq 0$ in $C^0[0,1] \Rightarrow$ nimmt Maximum nicht an!

Bemerkung 2.1. *Wir haben bisher die Eindeutigkeit von Lösungen elliptischer Randwertaufgaben betrachtet, im zweiten Teil dieses Skripts werden wir die Existenz solcher Lösungen untersuchen und dazu das Werkzeug Lax-Milgram einführen.*

Definition 2.1.
- *Sei H Hilbert-Raum. Eine Bilinearform $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn mit einem $c > 0 :\ |a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \qquad \forall u, v \in H$*
- *eine symmetrische, stetige Bilinearform a heißt elliptisch, wenn mit einem $\alpha > 0$: $a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall v \in H$*
- *induzierte Norm bzgl. elliptischen a: $\|v\| := \sqrt{a(v,v)}$ (Energienorm)*

Satz 2.2. *Lax-Milgram* *(Fassung für konvexe Mengen)*
Sei V eine abgeschlossene, konvexe Menge in einem Hilbert-Raum H, $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ einen elliptische Bilinearform. $\forall l \in H^*$ gilt:

$$J(v) := \frac{1}{2}a(v,v) - < l, v > \longrightarrow min!$$

hat genau eine Lösung in V

Beweis. J ist nach unten beschränkt, denn:

$J(v) \geq \frac{1}{2}\alpha \|v\|^2 - \|l\| \cdot \|v\| = \frac{1}{2\alpha}(\alpha \|v\| - \|l\|)^2 - \frac{\|l\|^2}{2\alpha} \geq -\frac{\|l\|^2}{2\alpha}$
Setze $c_1 := inf\{J(v) : v \in V\}$, (v_n) sei Minimalfolge, dann:

$$\Rightarrow \alpha \|v_n - v_m\|^2 \leq a(v_n - v_m, v_n - v_m) = 2a(v_n, v_n) + 2a(v_m, v_m) - a(v_n + v_m, v_n + v_m) = 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8J(\tfrac{v_n+v_m}{2}) \leq 4J(v_n) + 4J(v_m) - 8c_1$$

wegen $\frac{v_n+v_m}{2} \in V$ (konvex), $J(v_n), J(v_m) \longrightarrow c_1 \Rightarrow \|v_n - v_m\| \longrightarrow 0$ für $m, n \longrightarrow \infty$. Also (v_n) Cauchy-Folge in H, und $\exists u$mit $u = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$. V abgeschlossen $\Rightarrow u \in V$. J stetig $\Rightarrow J(u) \lim\limits_{n\to\infty} J(v_n) = inf_{v \in V} J(v)$.

Eindeutigkeit: Seien u_1 und u_2 Lösungen, dann ist offensichtlich $u_1, u_2, u_1, u_2, ...$ Minimalfolge, $\forall$ Minimalfolgen aber gilt: Cauchy-Folge $\Rightarrow$ möglich nur für $u_1 = u_2$ □

Definition 2.2. *$u \in H_0^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von Randwertaufgabe (*) wenn bzgl. ii) die Gleichungen*

$$a(u,v) = (f,v)_0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \text{ gelten.}$$

Satz 2.3. *Existenzsatz*
L sei gleichmäßig elliptischer Differentialoperator 2. Ordnung. Dann hat das (*) Randwertproblem stets eine schwache Lösung in $H_0^1(\Omega)$. Diese ist Minimum des Variationsproblems.

$$\frac{1}{2}a(v,v) - (f,v)_0 \longrightarrow min! \text{ in } H_0^1(\Omega)$$

Beweis. $c := sup\{|a_{ik}(x)|;\, x \in \Omega,\, 1 \leq i,\, k \leq n\}$

$$\Rightarrow \left| \sum_{i,k} \int_\Omega a_{ik} \partial_i u \partial_k v dx \right| \leq c \cdot \sum_{i,k} \int_\Omega |\partial_i u \partial_k v| \, dx$$

$$\Rightarrow \text{Cauchy-Schwarz} \leq c \cdot \sum_{i,k} \left[\int_\Omega (\partial_i u)^2 dx \int_\Omega (\partial_i v)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq C|u|_1|v|_1 \qquad \text{für } C = cn^2$$

sei C zudem $C \geq \sup\{|a_0(x)|;\, x \in \Omega\}$

$\Rightarrow \left|\int a_0 uvdx\right| \leq C \int |uv|dx \leq C \left\|u\right\|_0 \left\|v\right\|_0$

$\Rightarrow$ Stetigkeit : $a(u,v) \leq C \left\|u\right\|_1 \left\|v\right\|_1$
Die gleichmäßige Elliptizität bewirkt nun die punktweise Abschätzung (für C^1-Funktion)

$$\sum_{i,k} a_{ik}\partial_i v \partial_k v \geq \alpha \sum_i (\partial_i v)^2$$

wegen $a_0 \geq 0$: $a(v,v) \geq \alpha \sum_i \int\limits_\Omega (\partial_i v)^2 dx = \alpha |v|_1^2$ für $v \in H^1(\Omega)$.
$|\cdot|_1, \|\cdot\|_1$ sind im $H_0^1(\Omega)$ äquivalent (Friedrich'sche Ungleichung) $\Rightarrow$ a ist eine H^1 -elliptische Bilinearform auf $H_0^1(\Omega)$. Aus Lax-Milgram folgt: $\exists!$ schwache Lösung, diese minimiert das Variationsproblem □

Beispiel 2.3. $\begin{cases} -\triangle u = f & in\ \Omega \\ u = 0 & auf\ \partial\Omega \end{cases}$
mit Bilinearform:

$$a(u,v) = \int \bigtriangledown u \cdot \bigtriangledown v dx = (\bigtriangledown u, \bigtriangledown v)_0$$

$\Rightarrow$ *Lösung:* $(\bigtriangledown u, \bigtriangledown v)_0 = (f,v)_0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$
$(div) \bigtriangledown u$ *existiert und* $-\triangle u = -div\ grad\ u = f$.
Inhomogene Randbedingungen:
Sei nun $\begin{cases} Lu = f & in\ \Omega \\ u = g & auf\ \partial\Omega \end{cases}$
$u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ *mit* $u_0|_{\partial\Omega} = g$
$\Rightarrow$ *schwache Formulierung für homogene Randbedingungen*
gesucht wird $w \in H_0^1(\Omega)$ *mit*

$$a(w,v) = (f - Lu_0, v)_0 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$\Rightarrow$ *wegen* $(Lu_0, v)_0 = a(u_0, v)$ *wird also* $u \in H^1(\Omega)$ *gesucht mit*
$\begin{cases} a(u,v) = (f,v)_0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u - u_0 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$
$\Rightarrow$ *schwache Formulierung für inhomogene Randbedingungen.*

Bemerkung 2.2. *Aus Dichtheitsgründen kann man* $u \in H^1(\Omega)$ *annehmen.*