1 Interpolationsfehlerabschätzung in Sobolev-Räumen

1.1 Einleitung

Problem: Bestimmung von Schätzern der Differenz $(u - u_h)$

Dabei ist $u \in V$ die Lösung eines Grenzwertproblems 2.Ordnung und u_h dessen diskrete Lösung im Unterraum V_h von V.

Indem man einen Interpolant der Lösung verwendet, erhält man:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} = C \|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega}$$

Wir nehmen weiterhin an, dass $\widehat{\Omega}$ ein vieleckiges Gebiet ist und können daher $\widehat{\Omega}$ als Vereinigung vieleckiger finiter Elemente betrachten, also $\widehat{\Omega} = \bigcup_{K \in T_h} K$

Aufgrund der Gleichheit $(\Pi_h u)|_K = \Pi_K u$, die für alle $K \in T_h$ gilt, erhalten wir:

$$\|u - \Pi_h u\|_{1,\Omega} = \left(\sum_{K \in T_h} \|u - \Pi_K u\|_{1,K}^2 \right)^{1/2}$$

Somit haben wir unser ursprünglich gestelltes Problem auf das Schätzen von Größen $\|u - \Pi_K u\|_{1,K}$ reduziert. Es reicht also, anstelle eines Schätzers für das ganze Gebiet Schätzer für die einzelnen finiten Elemente, aus denen das Gebiet zusammengesetzt ist, zu suchen.

1.2 Grundlagen und Definitionen

Definition 1: Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der *Sobolev-Raum* $W^{m,p}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $v \in L^p(\Omega)$, für die alle Ableitungen $\partial^\alpha v$ mit $|\alpha| \leq m$ zu $L^p(\Omega)$ gehören. Im Fall p=2 schreiben wir H^2 für den zugehörigen Sobolev-Raum.

Auf dem Sobolev-Raum $W^{m,p}(\Omega)$ ist die folgende Norm definiert:

$$\begin{cases} \|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega |\partial^\alpha v|^p \, dx \right)^{1/p} & \text{für} \quad 1 \leq p < \infty \\ \|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| \leq m} \{\|\partial^\alpha f\|_\infty\} & \text{für} \quad p = \infty \end{cases}$$

Genauso kann man eine Seminorm auf dem Sobolev-Raum definieren:

$$\begin{cases} \|v\|_{m,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int\limits_\Omega |\partial^\alpha v|^p \, dx \right)^{1/p} & \text{für} \quad 1 \leq p < \infty \\ \|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max_{|\alpha| = m} \{\|\partial^\alpha f\|_\infty\} & \text{für} \quad p = \infty \end{cases}$$

Als nächstes wollen wir den Quotientenraum $W^{k+1,p}(\Omega)/P_K(\Omega)$ betrachten. Der Quotientenraum enthält die Äquivalenzklassen $\dot{v}$ von v mit

$$\dot{v}= \left\{ w \in W^{k+1,p}(\Omega) | (w-v) \in P_K(\Omega) \right\}$$

Auf dem Quotientenraum ist die folgende Quotientennorm definiert:

$$\left\| \dot{v} \right\|_{k+1,p,\Omega} = \inf_{p \in P_K(\Omega)} \| v+p \|_{k+1,p,\Omega}$$

Weiterhin haben wir die Abbildung

$$W^{k+1,p}(\Omega)/P_K(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\dot{v} \longrightarrow \left| \dot{v} \right|_{k+1,p,\Omega} = |v|_{k+1,p,\Omega}$$

Bei dieser Abbildung handelt es sich um eine Seminorm, die die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\forall \dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/P_K(\Omega) : \left| \dot{v} \right|_{k+1,p,\Omega} \leq \left\| \dot{v} \right\|_{k+1,p,\Omega}$$

Wir können nun folgende Aussage über die Seminorm machen:

Satz 1: Es existiert eine Konstante $C(\Omega)$, so dass für alle v aus $W^{k+1,p}(\Omega)$ gilt:

$$\inf_{p \in P_K(\Omega)} \| v+p \|_{k+1,p,\Omega} \leq C(\Omega) \, |v|_{k+1,p,\Omega}$$

und damit auch

$$\forall \dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/P_K(\Omega) : \left\| \dot{v} \right\|_{k+1,p,\Omega} \leq C(\Omega) \left| \dot{v} \right|_{k+1,p,\Omega}$$

□

Wir stellen also fest, dass $|\cdot|$ sogar eine Norm ist, die zur Quotientennorm äquivalent ist.

1.3 Fehlerabschätzung für polynomerhaltende Operatoren

Bevor wir Schätzer für Interpolanten suchen, wenden wir uns zuerst dem allgemeineren Fall zu und betrachten allgemeine polynomerhaltende Operatoren.

Dazu:

Definition 2: Zwei offene Gebiete $\Omega, \widehat{\Omega}$ heissen *affin-äquivalent*, wenn eine invertierbare affine Abbildung

$$F : \widehat{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow F(\widehat{x}) = B\widehat{x} + b \in \mathbb{R}^n$$

existiert, so dass

$$\Omega = F(\widehat{\Omega})$$

Es gelten die folgenden Beziehungen zwischen Punkten $x \in \Omega$ und $\widehat{x} \in \widehat{\Omega}$ und Funktionen, die über Ω und $\widehat{\Omega}$ definiert sind:

$$\widehat{x} \in \widehat{\Omega} \longrightarrow x = F(\widehat{x}) \in \Omega$$

$$(\widehat{v} : \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}) \longrightarrow v = \widehat{v} \cdot F^{-1} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Für alle derartigen $\widehat{x}, x, \widehat{v}, v$ gilt:

$$\widehat{v}(\widehat{x}) = v(x)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie sich die Sobolev-Seminormen von einem Gebiet zu einem dazu äquivalenten Gebiet verhalten. Dies ist Gegenstand des nächsten Satzes.

Satz 2: Seien $\Omega, \widehat{\Omega}$ zwei affin-äquivalente offene Gebiete in $\mathbb{R}^n$. Wenn die Funktion v für ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $p \in [1, \infty]$ aus $W^{m,p}(\Omega)$ ist, dann ist die Funktion $\widehat{v} = v \cdot F$ aus $W^{m,p}(\widehat{\Omega})$ und es existiert eine Konstante C=C(m,n), so dass gilt:

$$\forall v \in W^{m,p}(\Omega) : |\widehat{v}|_{m,p,\widehat{\Omega}} \leq C \, \|B\|^m \, |det(B)|^{-1/p} \, |v|_{m,p,\Omega}$$

wobei B die Matrix aus der affinen Abbildung F ist.

Genauso erhält man:

$$\forall \widehat{v} \in W^{m,p}(\widehat{\Omega}) : |v|_{m,p,\Omega} \leq C \, \left\|B^{-1}\right\|^m \, |det(B)|^{1/p} \, |\widehat{v}|_{m,p,\widehat{\Omega}}$$

□

Zur Anwendung von Satz 2 möchte man $\|B\|$ und $\left\|B^{-1}\right\|$ geometrisch ausdrücken.

Wir verwenden die folgende Notation:

$$h = diam(\Omega), \widehat{h} = diam(\widehat{\Omega})$$

$$\rho = sup \{diam(S); \; S \; ist \; eine \; in \; \Omega \; enthaltene \; Kugel\}$$

$$\widehat{\rho} = sup \left\{diam(\widehat{S}); \; \widehat{S} \; ist \; eine \; in \; \widehat{\Omega} \; enthaltene \; Kugel\right\}$$

Dann gilt:

Satz 3: Seien $\widehat{\Omega}, \Omega = F(\widehat{\Omega})$ zwei affin-äquivalente offene Gebiete in $\mathbb{R}^n$ und $F : \widehat{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow (B\widehat{x} + b) \in \mathbb{R}^n$ eine invertierbare affine Abbildung. Dann gelten die folgenden Abschätzungen:

$$\|B\| \leq \frac{h}{\widehat{\rho}} und \left\|B^{-1}\right\| \leq \frac{\widehat{h}}{\rho}$$

Beweis: Wir können schreiben:

$$\|B\| = \frac{1}{\widehat{\rho}} sup_{\|\xi\| = \widehat{\rho}} \|B\xi\|$$

Für einen gegebenen Vektor ξ, der $\|\xi\| = \widehat{\rho}$ erfüllt, existieren wegen der Definition von $\widehat{\rho}$ zwei Punkte $\widehat{y}, \widehat{z} \in \overline{\widehat{\Omega}}$, so dass $\widehat{y} - \widehat{z} = \xi$ gilt. Da mit $F(\widehat{y}) \in \overline{\Omega}$, $F(\widehat{z}) \in \overline{\Omega}$ $\|B\xi\| = B(\widehat{y} - \widehat{z}) = B\widehat{y} + b - (B\widehat{z} + b) = F(\widehat{y}) - F(\widehat{z})$ gilt, können wir folgern, dass $\|B\xi\| \leq h$ gilt. Damit ist die erste Ungleichung gezeigt.
Die zweite Ungleichung zeigt man auf ähnliche Weise.

□

Jetzt sind wir in der Lage, eine wichtige Eigenschaft von polynomerhaltenden Operatoren zu zeigen.

Satz 4: Für $k, m \in \mathbb{N}_0$, $p, q \in [1, \infty]$ seien $W^{k+1,p}(\widehat{\Omega})$, $W^{m,q}(\widehat{\Omega})$ zwei Sobolev-Räume für die die Inklusion

$$(a) W^{k+1,p}(\widehat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{\Omega})$$

gilt.
Sei $\widehat{\Pi} : W^{k+1,p}(\widehat{\Omega}) \longrightarrow W^{m,q}(\widehat{\Omega})$ linear, so dass

$$(b) \forall \widehat{p} \in P_K(\Omega) : \widehat{\Pi}\widehat{p} = \widehat{p}$$

.
Weiterhin sei für jedes offene, zu $\widehat{\Omega}$ affin-äquivalente Gebiet Ω die Abbildung Π_Ω definiert durch

$$(c) \widehat{(\Pi_\Omega v)} = \widehat{\Pi}\widehat{v}$$

für alle Funktionen $\widehat{v} \in W^{k+1,p}(\widehat{\Omega})$ und $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, die die weiter oben angegebene Beziehung erfüllen.
Dann existiert eine Konstante $C(\widehat{\Pi}, \widehat{\Omega})$, so dass für alle affin-äquivalenten Gebiete Ω gilt:

$$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega) : |v - \Pi_\Omega v|_{m,q,\Omega} \leq C(\widehat{\Pi}, \widehat{\Omega})(meas(\Omega))^{(1/q)-(1/p)} \frac{h^{k+1}}{\rho^m} |v|_{k+1,p,\Omega}$$

wobei h und ρ definiert sind wie oben.

Beweis: Unter Verwendung von (b) erhält man für alle $\widehat{v} \in W^{k+1,p}(\widehat{\Omega})$ und alle $\widehat{p} \in P_K(\Omega)$ die folgende Identität:

$$\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v} = (id - \widehat{\Pi})(\widehat{v} + \widehat{p})$$

Dabei bezeichnet id die identische Abbildung von $W^{k+1,p}(\widehat{\Omega})$ nach $W^{m,q}(\widehat{\Omega})$. Nach (a) ist diese Abbildung stetig. Aus dieser Gleichheit können wir folgern:

$$\left|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}\right|_{m,q,\widehat{\Omega}} \leq \left\|id - \widehat{\Pi}\right\|_{L(W^{k+1,p}(\widehat{\Omega}); W^{m,q}(\widehat{\Omega}))} \inf_{\widehat{p} \in P_K(\widehat{\Omega})} \|\widehat{v} + \widehat{p}\|_{k+1,p,\widehat{\Omega}} \leq C(\widehat{\Pi}, \widehat{\Omega}) |\widehat{v}|_{k+1,p,\widehat{\Omega}}$$

Dabei erhält man die zweite Ungleichung durch Anwendung der Abschätzung des Infimums aus Satz 1.

Aus der Beziehung (c) folgt $\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v} = (\widehat{v - \Pi_\Omega v})$. Anwendung von Satz 2 liefert und die beiden folgenden Abschätzungen:

$$|v - \Pi_\Omega v|_{m,q,\Omega} \leq C \left\|B^{-1}\right\|^m |det(B)|^{1/q} \left|\widehat{v} - \widehat{\Pi}\widehat{v}\right|_{m,q,\widehat{\Omega}}$$

$$|\widehat{v}|_{k+1,p,\widehat{\Omega}} \leq C \|B\|^{k+1} |det(B)|^{-1/p} |v|_{k+1,p,\Omega}$$

Weiterhin können wir beobachten, dass gilt $|det(B)| = \frac{meas(\Omega)}{meas(\widehat{\Omega})}$.

Dies zusammen mit $\|B\| \leq h/\widehat{\rho}$ und $\left\|B^{-1}\right\| \leq \widehat{h}/\rho$ und den drei oben erhaltenen Abschätzungen liefert durch sukzessives Ineinandereinsetzen die Behauptung.

□

1.4 Schätzung der Interpolationsfehler $|v - \Pi_K v|_{m,q,K}$ für affine Familien von finiten Elementen

Von nun an wollen wir nicht mehr das ganze Gebiet Ω betrachten, sondern uns mit den einzelnen finiten Elementen aus der Triangulation von Ω beschäftigen. Wie bereits in der Einleitung gesagt reicht es, eine Fehlerabschätzung auf diesen zu kennen. Eine solche Fehlerabschätzung für ein einzelnes finites Element wollen wir im folgenden Satz beweisen.

Satz 5: Sei $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ ein finites Element. Sei s die größte Ordnung der in $\widehat{\Sigma}$ auftretenden Ableitungen. Wenn es $m, k \in \mathbb{N}_0$ und $p, q \in [1, \infty]$ gibt, für die die folgenden Inklusionen gelten:
(i) $W^{k+1,p}(\widehat{K}) \hookrightarrow C^s(\widehat{K})$
(ii) $W^{k+1,p}(\widehat{K}) \hookrightarrow W^{m,q}(\widehat{K})$
(iii) $P_K(\widehat{K}) \subset \widehat{P} \subset W^{m,q}(\widehat{K})$
Dann existiert eine Konstante $C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$, so dass für alle affin-äquivalenten Elemente (K, P, Σ) und alle Funktionen $v \in W^{k+1,p}(K)$ gilt:

$$|v - \Pi_K v|_{m,q,K} \leq C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})(meas(K))^{(1/p)-(1/q)} \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,p,K}$$

wobei $\Pi_K v$ der P_K-Interpolant von v, meas(K) das dx-Maß von K, $h_K = diam(K)$, $\rho_K = \sup\{diam(S);\ S\ ist\ eine\ in\ K\ enthaltene\ Kugel\}$.

Beweis: Aus der Inklusion $P_K(\widehat{K}) \subset \widehat{P}$ und der Eigenschaft des $\widehat{P}$-Interpolationsoperators $\widehat{\Pi}$, die Elemente von $\widehat{P}$ wieder aus sich selbst abzubilden, folgt $\forall \widehat{p} \in P_k(\widehat{K})\ \widehat{\Pi}\widehat{p} = \widehat{p}$. Sei $\widehat{v}$ eine Funktion im Raum $W^{k+1,p}(\widehat{K})$. Dann gilt aufgrund der Inklusion (i) $\widehat{v} \in C^s = dom\widehat{\Pi}$.

Für die Ordnung s der höchsten in $\widehat{\Sigma}$ auftretenden Ableitung gilt in der Praxis s=0,1, oder 2. Für unseren Beweis nehmen wir s=2 an. Dann hat der $\widehat{P}$-Interpolant der Funktion $\widehat{v}$ die Form

$$\widehat{\Pi}\widehat{v} = \sum_i \widehat{v}(\widehat{a}_i^0)\widehat{p}_i^0 + \sum_{i,k} \{D\widehat{v}(\widehat{a}_i^1)\widehat{\xi}_{ik}^1\}\widehat{p}_{ik}^1 + \sum_{i,k,l} \{D^2\widehat{v}(\widehat{a}_i^2)(\widehat{\xi}_{ik}^2, \widehat{\xi}_{il}^2)\}\widehat{p}_{ikl}^2$$

Dabei sind die a_i aus dem finiten Element und die ξ Vektoren aus $\mathbb{R}_n$. Im ersten Summanden stehen die Funktionswerte an den Stellen a_i, im zweiten Summanden die ersten partiellen Ableitungen und im dritten Summanden die zweiten partiellen Ableitungen.
Wegen der Inklusionen (iii) gilt für die Abbildung $\widehat{\Pi}$:

$$\widehat{\Pi}: \; W^{k+1,p}(\widehat{K}) \longrightarrow W^{m,q}(\widehat{K})$$

. Um Satz 4 anwenden zu können, müssen wir zeigen, dass die Abbildung $\widehat{\Pi}$ stetig ist. Dazu zeigen wir, dass $\left\|\widehat{\Pi}\widehat{v}\right\|$ beschränkt ist:

$$\begin{aligned}
&\left\|\widehat{\Pi}\widehat{v}\right\| \leq \textstyle\sum_i |\widehat{v}(\widehat{a_i^0})| \left\|\widehat{p}_i^0\right\|_{m,q,\widehat{K}} + \sum_{i,k} |\{D\widehat{v}(\widehat{a}_i^1)\widehat{\xi}_{ik}^1\}| \left\|\widehat{p}_{ik}^1\right\|_{m,q,\widehat{K}} + \sum_{i,k,l} |\{D^2\widehat{v}(\widehat{a}_i^2)(\widehat{\xi}_{ik}^2, \widehat{\xi}_{il}^2)\}| \left\|\widehat{p}_{ikl}^2\right\|_{m,q,\widehat{K}} \\
&\leq C(\left\|\widehat{p}_i^0\right\|_{m,q,\widehat{K}}, \left\|\widehat{\xi}_{ik}^1\right\| \left\|\widehat{p}_{ik}^1\right\|_{m,q,\widehat{K}}, \left\|\widehat{\xi}_{ik}^2\right\| \left\|\widehat{\xi}_{il}^2\right\| \mid \left\|\widehat{p}_{ikl}^2\right\|_{m,q,\widehat{K}}) \left\|\widehat{v}\right\|_{2,\infty,\widehat{K}} \\
&\leq C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) \left\|\widehat{v}\right\|_{k+1,p,\widehat{K}}
\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Ungleichung aufgrund der Voraussetzung (i).
Desweiteren ist aus dem vorigen Vortrag bekannt: $\widehat{(\Pi_K v)} = \widehat{\Pi}\widehat{v} \; \forall v \in dom\Pi_K$.
Damit sind alle zur Anwendung von Satz 4 notwendigen Voraussetzungen gegeben und die zu beweisende Ungleichung stellt nur noch eine Umformulierung der in Satz 4 bewiesenen Ungleichung dar.

□

Bemerkung: In der Praxis ist meist der Fall p=q=2 von Interesse. In diesem Fall vereinfacht sich die Ungleichung zu

$$|v - \Pi_K v|_{m,K} \leq C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma}) \frac{h_K^{k+1}}{\rho_K^m} |v|_{k+1,K}$$

Bei den betrachteten Normen handelt es sich um die L^2-Normen.

In Spezialfällen ist es möglich, die gerade bewiesene Ungleichung weiter zu vereinfachen. Im Falle regulärer Familien finiter Elemente können wir den Parameter ρ_K aus unserer Abschätzung entfernen. Dazu benötigen wir zuerst

Definition 3: Eine Familie von finiten Elementen (K, P_K, Σ_K) heißt *regulär*, wenn sie die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Es existiert eine Konstante σ, so dass gilt $\forall K: \; \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma$
2. Der Durchmesser h_K ist beschränkt.

Für derartige Familien kann die Fehlerabschätzung aus Satz 5 leicht in eine Normabschätzung der Norm $\|v - \Pi_K v\|_{m,q,K}$ überführt werden:

Satz 6: Sei $(K, P_K, \Sigma_K$ eine reguläre affine Familie von finiten Elementen, deren Referenzelement $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$ die Voraussetzungen (i), (ii), (iii) aus Satz 5 erfüllt. Dann existiert eine Konstante $C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$, so dass für alle finiten Elemente K der Familie und alle Funktionen $v \in W^{k+1,p}(K)$ gilt:

$$\|v - \Pi_K v\|_{m,q,K} \leq C(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})(meas(K))^{(1/q)-(1/p)} h_K^{k+1-m} |v|_{k+1,p,K}$$

Beweis: Man schätzt in der Unleichung aus Satz 5 ρ durch h ab. Weiterhin sieht man bei genauer Betrachtung der Definitionen der Norm und der Seminorm, dass man die Norm zu einem bestimmten m erhält, indem man die einzelnen Seminormen zu l mit $l \leq m$ aufsummiert. Da die Faktoren auf der rechten Seite der Abschätzung aus Satz 5 mit Ausnahme von h alle von m unabhängig sind, ergibt sich durch die Summation nur eine Erhöhung ihrer Anzahl, also eine Veränderung in der Konstanten. Da die betrachteten Familien, nach Voraussetzung regulär sind, ist h beschränkt, also kann man in der Summe das h mit der höchsten Potenz ausklammern und der Rest fließt ebenfalls in die Konstante ein.

□