

Definition und Eigenschaften Finiter Elemente

1 Das letzte Mal

Im letzten Vortrag haben wir zum Schluss das Lemma von Lax Milgram präsentiert bekommen, dass ich hier noch einmal in Erinnerung rufen möchte:

Lax-Milgram:

Sei $V \subseteq H$ abgeschlossen und konvex.

Sei $a(\cdot, \cdot)$ eine elliptische Bilinearform, dann hat

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle$$

genau eine Lösung.

Damit assoziieren wir nun das diskrete Problem: Finde u_h , so dass:

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \forall v_h \in V_h$$

wobei V_h ein endlichdimensionaler Unterraum von V ist, und finden durch die Lösung dieses Problems eine approximierende Lösung der ursprünglichen Aufgabenstellung.

Im Weiteren betrachten wir im wesentlichen die bereits bekannten Probleme 2. Ordnung, wie die Poissongleichung:

$$\Delta u = f$$

und in einigen Fällen Probleme 4. Ordnung wie

$$L(u) = \frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) + \frac{d}{dx} \left(q(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + r(x) u(x) = s(x)$$

Dabei sei das Problem auf $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ offen gegeben, wobei $\partial\Omega$ lipschitzstetig sein soll.

2 Definition Finiter Elemente

Ein finites Element ist ein Tripel (K, P, Σ) , wobei diese Einträge wie folgt erklären:

2.1 K

ist eine abgeschlossene nichtleere Untermenge des \mathcal{R}^n , also $K = \overline{K}$ und $K \setminus \partial K \neq \emptyset$.

2.2 P (oder auch P_K)

ist ein Raum reellwertiger Funktionen auf K , wobei wir hier nur Polynomräume betrachten wollen.

2.3 Σ (oder auch Σ_K)

ist eine endliche Menge linearer Funktionale, der sogenannten Freiheitsgrade, die in folgendem Sinne eindeutig sein sollen:

Sei $\#\Sigma = N$, für jeden Multiskalar (Vektor) $\alpha \in \mathcal{R}$ gibt es $p \in P$, so dass

$$\Phi(p) = \alpha_i \quad \forall i$$

also gibt es auch $p_i \in P : \sum_i^N \Phi_j(p_i) = \delta_{ij}$ und somit gilt für alle

$$p \in P : \sum_i^N \Phi_j(p) p_i = p$$

Damit diese Aussage gilt, muss gelten $\dim(P_K) = N$ dies ist für jedes Finite Element zu überprüfen.

„Beispiele“ für Φ sind Punktauswertungen:

$$\begin{aligned} p &\rightarrow p(a_i) \\ p &\rightarrow Dp(a_i)\xi_{ik} \\ p &\rightarrow D^2p(a_i)\xi_{ik}\xi_{il} \end{aligned} \quad (1)$$

3 Erste Beispiele finiter Elemente

Ich werde hier einiger Beispiele für finite Elemente darstellen, explizite Basisfunktionen des Polynomraumes angeben sowie die Interpolation von Funktionen aus P durch die Basisfunktionen beschreiben. Die in dieser Sektion beschriebenen Finiten Elemente gehören zu den sogenannten Lagrange-Finiten Elementen, da in ihren Freiheitsgraden keine Ableitungen sondern nur Punktauswertungen vorkommen. Umfasst die Menge der Freiheitsgrade zusätzlich auch Ableitungen, so nennen wir die Finiten Elemente Hermite-Finite Elemente.

3.1 Vorüberlegungen

3.1.1 n-Simplizes

Ein n-Simplex ist die konvexe Hülle von n+1 Punkten die nicht in einer Hyperebene des \mathcal{R}^n liegen. Diese Punkte bilden die *Knoten* des n-Simplex, ihre direkten Verbindungen nennen wir *Kanten*, die von den Kanten eingeschlossenen Hyperebenen *Flächen*. Die Aussage, dass die Knoten (nennen wir sie a_i) nicht in einer Hyperebene liegen ist äquivalent dazu, dass die Matrix der Knoten:

$$a_j = (a_{ij})_{i=1}^n \in \mathcal{R}$$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Diese n-Simplizes werden in diesem Abschnitt die Gebiete K der finiten Elemente bilden.

3.1.2 Baryzentrische Koordinaten

Baryzentrische Koordinaten kann man sich in einem n-Simplex wie er oben beschrieben wurde als die Gewichtung der Knotenpunkte vorstellen. Formal sind sie die eindeutige Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt für baryzentrische Koordinaten: $\sum_i \lambda_i = 1$ und $\sum_i \lambda_i a_{ij} = x_j$

Nun führen wir eine Umformung durch, und zwar multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit A^{-1} und erhalten somit die λ_i als Funktion der x_j . Wenn die b_{ij} die Matrixeinträge des Inversen von A sind, so erhalten wir

$$\lambda_i = \sum_j b_{ij} x_j + b_{in+1}$$

Dies ist ein Polynom ersten Grades im folgenden Sinne: Wir bezeichnen $P_k(\mathcal{R}^n)$ als Raum der Polynome vom Grad k, wenn für alle $p \in P$ gilt:

$$p = \sum_{|\alpha| < k} \gamma_\alpha x^\alpha$$

dabei ist α ein Multiindex mit n Einträgen. Durch Betrachtung der linear unabhängigen Summanden gelangen wir zu der Erkenntnis, dass

$$\dim(P_k) = \binom{n+k}{k}$$

3.2 Beispiele

3.2.1 n-Simplex Typ 1

K = ein n Simplex

$P = P_1 \quad \dim(P_1) = n+1$

$\Sigma = \{ p(a_i) \}$

Nun betrachten wir die Interpolation von Polynomen auf K:

$$p = \sum_i p(a_i) \lambda_i$$

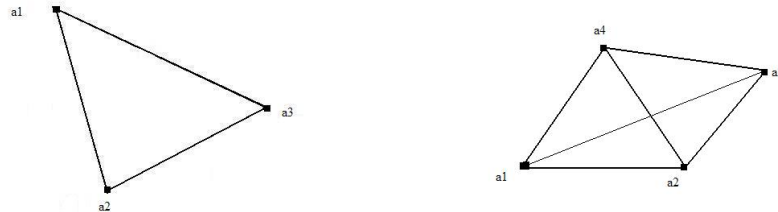


Abbildung 1: Links: 2 Simplex Typ 1, rechts: 3 Simplex Typ 1.

3.2.2 n-Simplex Typ 2

K = ein n Simplex

$$P = P_2 \quad \dim(P_2) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Sigma = \{ p(a_i), p(a_{ij}) \} \quad \text{Dabei definieren wir } a_{ij} := \frac{a_i + a_j}{2}$$

Auch hier betrachten wir die Interpolation von Polynomen auf K :

$$p = \sum_i \lambda_i (2\lambda_i - 1) p(a_i) + \sum_{i < j} 4\lambda_i \lambda_j p(a_{ij})$$



Abbildung 2: Links: 2 Simplex Typ 2, rechts: 3 Simplex Typ 2.

3.2.3 n-Simplex Typ 3

K = ein n Simplex

$$P = P_3 \quad \dim(P_3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

$$\Sigma = \{ p(a_i), p(a_{ijj}), p(a_{ijk}) \}$$

$$\text{Dabei definieren wir } a_{ijk} := \frac{a_i + a_j + a_k}{3}$$

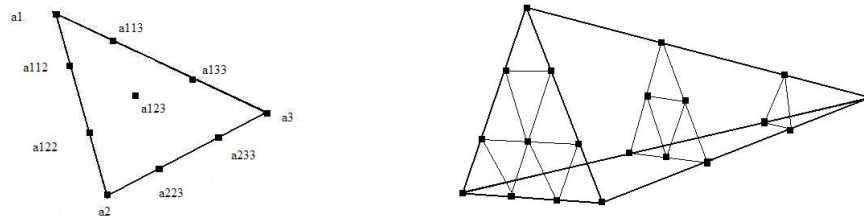


Abbildung 3: Links: 2 Simplex Typ 3, rechts: 3 Simplex Typ 3.

Wir erhalten folgende Interpolation:

$$p = \sum_i \frac{\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)}{2} p(a_i) + \sum_{i < j} \frac{\lambda_i \lambda_j (3\lambda_i - 1)}{2} p(a_{ij}) + \sum_{i < j < k} 27 \lambda_i \lambda_j \lambda_k p(a_{ijk})$$

Siehe Abbildung 3.

3.2.4 n-Simplex Typ 3'

Ich möchte noch eine weitere Art eines n-Simplex vorstellen. Die bisherigen n-Simplizes suggerieren, dass nur n-Simplizes mit Freiheitsgraden entsprechend der Dimension von „vollen“ Polynomräumen entsprechenden Grades gültig sind. Wir können aber durch Verknüpfung von Freiheitsgraden Polynomräume erzeugen, die zwischen den „vollen“ Räumen liegen wie im folgenden Beispiel den Raum P'_3 , für den gilt:

$$P_2 \subset P'_3 \subset P_3$$

Wir setzen folgende Bedingung: Sei

$$\Phi_{ijk}(p) = 12p(a_{ijk}) + 2 \sum_{l=i,j,k} p(a_l) - 3 \sum_{\substack{l,m=i,j,k \\ l \neq m}} p(a_{lm})$$

Dann sei $P'_3 := \{p \in P_3 \mid \Phi_{ijk}(p) = 0 \quad 1 \leq i < j < k \leq n + 1\}$

Die Dimension dieses Polynomraumes ist $(n + 1)^2$.

Wie man leicht einsieht (-;-) ist die zugehörige Interpolationsformel durch

$$p = \sum_i \left(\frac{\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2)}{2} + \frac{9}{2} \lambda_i \sum_{j < k} \sum_{j,k \neq i} \lambda_j \lambda_k \right) p(a_i) + \sum_{i \neq j} \left(\frac{9}{2} \lambda_i \lambda_j (\lambda_i - 1) + \frac{27}{4} \lambda_i \lambda_j \sum_{k \neq i,j} \lambda_k \right) p(a_{ij})$$

gegeben.

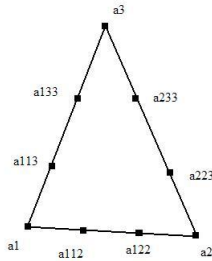


Abbildung 4: Links: 2 Simplex Typ 3'

4 Hermite Finite Elemente

Hermite Finite Elemente unterscheiden sich von den bereits beschriebenen Lagrange-Finiten Elementen im wesentlichen dadurch, dass sie auch (Richtungs-)Ableitungen als Freiheitsgrade verwenden. Um derartige Freiheitsgrade richtig verstehen zu können, sollten wir uns einige Eigenschaften von allgemeinen Richtungsableitungen ins Gedächtnis rufen.

Für eine Funktion $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ gilt, dass alle Richtungsableitungen 1. Grades an einem Punkt durch Angabe von n Richtungsableitungen 1. Grades in linear unabhängige Richtungen eindeutig bestimmt sind. Ebenso sind alle Richtungsableitungen 2. Grades durch Angabe von $\frac{n(n+1)}{2}$ Richtungsableitungen 2. Grades bestimmt und ähnliche Formeln gibt es für Ableitungen aller Ordnungen. Auf Grund dieser Tatsache ist schnell klar, dass die Angabe von Freiheitsgraden für identische Hermite-Finite Elemente nicht eindeutig ist. In den unten aufgeführten Beispielen werde ich jeweils nur eine Variante der Darstellung der Freiheitsgrade angeben und im nächsten Kapitel darauf eingehen, welches Kriterium wir an die Gleichheit von Finiten Elementen stellen.

Die Richtung der Ableitung kann bei der Konstruktion des Finiten Elements weitgehend frei gewählt werden, in einigen der folgenden Beispiele wird z.Bsp. die Orthogonalität der Ableitungsrichtung zu einer Seite des Gebietes des Finiten Elements gefordert, oder dass zwischen den Seiten des Gebietes und der Ableitungsrichtung ein anderer fester Winkel eingehalten wird.

Ich werde später noch ausführlicher darauf eingehen, halte es aber für sinnvoll bereits jetzt zu erwähnen, dass Funktionen die über aneinandergesetzten Hermite-Finiten Elementen gebildet werden trotz der Verwendung der Ableitungen in den Freiheitsgraden nicht automatisch differenzierbar sein müssen.

Ich werde mich an die Darstellung aus dem Buch *The Finite Element Method for Elliptic Problems* von P. Ciarlet halten und in den Zeichnungen Punkte, für die eine genügend große Anzahl von Richtungsableitungen in den Freiheitsgraden auftauchen um alle Ableitungen dieses Grades zu bestimmen mit Kreisen umgeben, d.h. wird z. Bsp. im \mathcal{R}^2 ein Punkt von einem Kreis umschlossen, so sind zwei erste Ableitungen gegeben, wird er von zwei Kreisen umschlossen, so sind zwei erste und drei zweite Ableitungen gegeben usw. Wird hingegen nur ein Teil der Richtungsableitungen angegeben, der notwendig wäre um alle eindeutig festzulegen, so werde diese durch Pfeile in die entsprechenden Richtungen gekennzeichnet.

4.1 Der Polynomraum Q_k

Zunächst definieren wir den den Raum $Q_k(\mathcal{R}^n)$ als den Raum der Polynome vom Grad k in folgendem Sinne:

$$p \in Q_k : p = \sum_{\alpha, \alpha_i < k \forall i} \gamma_\alpha x^\alpha$$

wobei α wie bereits vorher ein Multiindex mit n Einträgen ist. Wieder liefert uns eine Betrachtung der linear unabhängigen Summanden die Dimension: $\dim(Q_k(\mathcal{R}^n)) = (k+1)^n$. Der hier eingeführte Polynomraum wird in dieser Sektion nur einmal recht unanschaulich verwendet, er findet aber in Sektion ausführliche Verwendung, inklusive beispielhafter Aufstellungen von Basispolynomen.

4.2 Hermite n-Simplex Typ 3

$K =$ ein n Simplex

$$P = P_3 \quad \dim(P_3) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$$

$$\Sigma = \{ p(a_i), p(a_{ijk}), Dp(a_i)(a_i - a_j) \}$$

Im \mathcal{R}^2 erhalten wir auf diese Weise ein Finites Element mit 10 Freiheitsgraden.

Für dieses und das folgende Beispiel werde ich keine expliziten Formeln mehr angeben, vielmehr beschränke ich mich darauf, das Element zu zeigen und die Anzahl der Freiheitsgrade sowie den zugehörigen Polynomraum anzugeben, da die Menge der Freiheitsgrade ohne Probleme aus den Zeichnungen erschlossen werden kann.

4.3 Bogner-Fox-Schmitt Rechteck

Siehe Abbildung 5.

$$P = Q_3 \quad \dim(Q_3) = 16$$

4.4 Argyris Dreieck

Siehe Abbildung 6.

Das Argyris-Dreieck verfügt wie man sieht über 21 Freiheitsgrade, wodurch uns ermöglicht wird Polynome des Typs P_5 über einem solchen Finiten Element aufzuspannen.

Diese Konstellation der Bedingungen gestattet für dieses und das vorhergehende Beispiel auch eine Triangulation von finiten Elementen, so dass der zusammengesetzte Polynomraum nicht nur stetige, sondern einfach stetig differenzierbare Funktionen enthält und diese sogar zweimal schwach ableitbar sind.

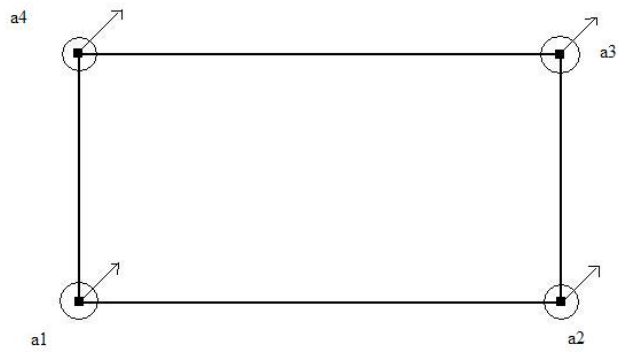


Abbildung 5: Bogner Fox Schmitt - Rechteck

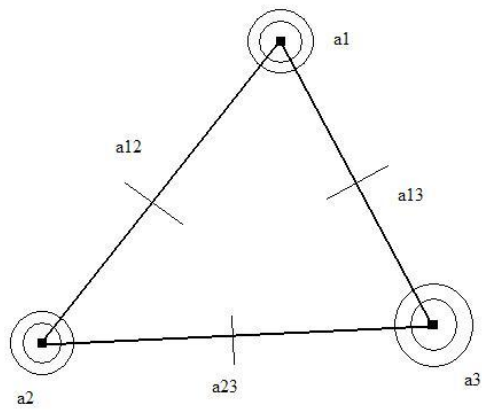


Abbildung 6: Argyris Dreieck

5 Weitere allgemeine Konzepte finiter Elemente

5.1 Der Interpolator

Den Interpolator, den wir ab sofort als Π oder Π_K bezeichnen wollen haben wir bereits im vorherigen Abschnitt implizit benutzt und wollen ihn nun formal definieren. Sei v eine zunächst beliebige Funktion. Dann erklären wir

$$\Pi v = \sum_i \Phi_i(v) p_i$$

und wir machen uns klar, dass $\Pi v \in P$ und $\Phi(\Pi v) = \Phi(v)$

Wenn alle Freiheitsgrade in der Form (1) vorliegen, dann ist der Definitionsbereich von Π :

$$\text{dom}\Pi_K = \mathcal{C}^s(K)$$

Das $P \subset \text{dom}\Pi_K$ gilt ist auf Grund der Konstruktion von Π klar.

5.2 Gleichheit finiter Elemente

Wir bezeichnen zwei finite Elemente (K, P, Σ) und (L, Q, Λ) genau dann als gleich, wenn gilt:

$$P = L \quad P = Q \quad \text{und} \quad \Pi_K = \Pi_L$$

Die ersten beiden Bedingungen sind nicht erklärungsbedürftig, die dritte hingegen soll hier kurz erläutert werden. Im Fall von Lagrange Finiten Elementen gilt mit $\Pi_K = \Pi_L$ automatisch auch $\Sigma = \Lambda$ und für diesen Fall ist die Bedingung klar. Komplizierter wird der Fall hingegen bei den Hermiten Finiten Elementen, den Finiten Elemente, bei denen auch Ableitungen in den Freiheitsgrade auftauchen, da im n -dimensionalen Raum durch n Richtungsableitungen in linear unabhängige Richtungen an einem Punkt alle Richtungsableitungen an diesem Punkt festgelegt sind. Dies ermöglicht es aber, unterschiedliche Richtungen der Ableitung zu wählen. Zum Beispiel seien die Freiheitsgrade in Σ von der Form (1), also $D\nu(a_i)(a_j - a_i)p_{ij}$ und die Freiheitsgrade in Λ die partiellen Ableitungen entlang der kanonischen Basisvektoren $\partial_k \nu(a_i)q_{ik}$. Dann betrachten wir die folgende Gleichung:

$$\sum_{i,j} D\nu(a_i)(a_j - a_i)p_{ij} = \sum_{i,j} \sum_{k=1}^n \mu_{ijk} \partial_k \nu(a_i)p_{ij} = \sum_{i,k} \partial_k \nu(a_i)q_{ik}$$

und da sich die Richtungsableitungen der Menge Σ vollständig durch Linearkombination der Richtungsableitungen aus Λ ausdrücken lassen, lassen die Mengen der Freiheitsgrade aufeinander zurückführen.

5.3 Affin äquivalente finite Elemente

Die Idee affin äquivalenter finiter Elemente spielt eine wichtige Rolle in der Fehlerabschätzung für die resultierende Approximierende. Darüber hinaus werden wir sie zur Konstruktion von Basisfunktionen über finiten Elementen in Rechteckform benutzen.

Sei (K, P_K, Σ_K) eine Familie von finiten Elementen gleichen Typs, zum Beispiel von Typ 2. Dann sei $\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma}$ ein weiteres finites Element des gleichen Typs.

Nun gibt es für jedes K eine eindeutig bestimmte affine Abbildung

$$F_K : \hat{x} \mapsto B_K \hat{x} + b_K$$

so dass $F_K(\hat{a}_i) = a_i$. Damit gilt automatisch auch: $F_K(\hat{a}_{ijk}) = a_{ijk}$. Da F_K affin ist, ist F_K selbstverständlich auch bijektiv.

Wir betrachten nun sehr kurzfristig die Menge

$$P_K^* = \{p : K \rightarrow \mathcal{R} \ ; \ p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \ , \ \hat{p} \in \hat{P}\} = P_K$$

und sehen sofort die Identität auf der rechten Seite, da die Abbildung F affin und insbesondere bijektiv ist.

Aus der Affinität der Abbildung erhalten wir also automatisch die folgenden Bedingungen:

- $K = F_K(\hat{K})$
- $P_K = \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1}\}$
- $\Sigma_K = \{p(F_K(\hat{a}_i)) \ ; \ p(F_K(\hat{a}_{ijk}))\}$

Wenn zusätzlich noch

- $\xi_{ik} = B\hat{\xi}_{ik}$

für alle Ableitungsrichtungen gilt, so nennen wir die obigen Elemente *affin äquivalent*. Wie bereits vorher, gilt diese Bedingung für alle Lagrange-Finiten Elemente, da in ihnen keine Ableitungen auftreten. In Hermiten-finiten Elementen kann es vorkommen, dass wir fordern, dass die Ableitungsrichtungen orthogonal zu einer Kante des finiten Elements als Freiheitsgrad ausgewertet werden. Da affine Abbildungen aber nicht oBdA Winkeltreu sind, muss diese Eigenschaft bei Bedarf extra gefordert werden.

5.4 Über die Übertragbarkeit von Interpolationsergebnissen auf affin äquivalenten finiten Elementen

Satz

Seien $(\hat{K}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ und (K, P, Σ) affin äquivalente Finite Elemente deren Freiheitsgrade die Form wie in (1) haben. Dann gilt für die Interpolatoren:

$$\widehat{(\Pi\nu)} = \hat{\Pi}\hat{\nu}$$

Beweis

Wir wissen, dass

$$\Pi\nu = \sum_i \nu(a_i)p_i + \sum_{ik} [D\nu(a_i)\xi_{ik}]p_{ik} + \sum_{ikl} [D^2\nu(a_i)(\xi_{ik}\xi_{il})]p_{ikl}$$

Nun erstellen und betrachten wir die folgenden Identitäten:

1. $\nu(a_i) = \hat{\nu}(\hat{a}_i)$ nach Konstruktion, denn $F \circ F^{-1}$ ist gerade die Identität.
2. $D\nu(a_i)\xi_{ik} = D\nu(F(\hat{a}_i)B\hat{\xi}_{ik}) = D\nu(F(\hat{a}_i)DF(\hat{\xi}_{ik})) = D(\nu \circ F)(\hat{a}_i)\hat{\xi}_{ik} = D\hat{\nu}(\hat{a}_i)\hat{\xi}_{ik}$
3. $D^2\nu(a_i)\xi_{ik}\xi_{il} = D^2\nu(F(\hat{a}_i)B\hat{\xi}_{ik}B\hat{\xi}_{il}) = D^2\nu(F(\hat{a}_i)DF(\hat{\xi}_{ik})DF(\hat{\xi}_{il})) = D^2(\nu \circ F)(\hat{a}_i)\hat{\xi}_{ik}\hat{\xi}_{il} = D^2\hat{\nu}(\hat{a}_i)\hat{\xi}_{ik}\hat{\xi}_{il}$

Um die Kettenregel in Teil 3 rückwärts anwenden zu können, machen wir uns klar, dass $D^2F = 0$, da F linear ist.

Also ist $\hat{\Pi}\hat{\nu} = \sum_i \hat{\nu}(\hat{a}_i)p_i + \sum_{ik} [D\hat{\nu}(\hat{a}_i)\hat{\xi}_{ik}]p_{ik} + \sum_{ikl} [D^2\hat{\nu}(\hat{a}_i)(\hat{\xi}_{ik}\hat{\xi}_{il})]p_{ikl}$ und die Behauptung ist bewiesen.

6 Weitergehende Beispiel zu Finiten Elementen

Auch in dieser Sektion werde ich nur Lagrange-Finite Elemente beschreiben. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen werden die hier betrachteten Gebiete n-Rechtecke sein, und zur Konstruktion der Basisfunktionen werde ich auf den soeben bewiesenen Satz der Übertragbarkeit von Interpolationen zurückgreifen.

6.1 n-Rechteck vom Typ 1

$K = \text{ein } n\text{-Rechteck}$
 $P = Q_1 \quad \dim(P) = 2^n$
 $\Sigma = \{p(a_i)\}$

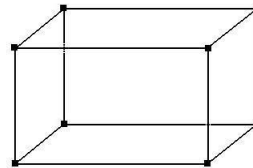
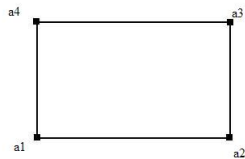


Abbildung 7: Links: 1-Rechteck Typ 1, Rechts: 2-Rechteck Typ 1

Ich möchte nun die Konstruktion der Basisfunktionen erläutern. Nach Satz 4.4 ist es ausreichend Basisfunktionen über dem im Ursprung liegenden n-Einheitsquadrat zu erstellen, diese lassen sich durch eine affine Abbildung übertragen, da alle n-Rechtecke vom Typ 1 affin äquivalent sind. Da die Nummerierung der Eckpunkte eines n-Rechtecks für Dimensionen > 1 nicht mehr kanonisch ist, lässt sich keine geschlossene Formel für die Basispolynome angeben, daher werde ich das Prinzip für die Fälle $n \in \{1, 2\}$ erläutern.

Sei $n = 1$. Dann haben die Eckpunkte des Einheitsquadrats die folgenden Koordinaten:

$$a_1 = (0,0) \quad a_2 = (0,1) \quad a_3 = (1,1) \quad a_4 = (1,0)$$

Dann sind die p_i leicht zu erkennen:

$$p_1 = (1 - x_1)(1 - x_2) \quad p_2 = (1 - x_1)x_2 \quad p_3 = x_1x_2 \quad p_4 = x_1(1 - x_2)$$

Sei nun $n = 2$. Dann setzen wir die folgenden Eckpunkte:

$$\begin{array}{llll} a_1 = (0,0,0) & a_2 = (0,1,0) & a_3 = (1,1,0) & a_4 = (1,0,0) \\ a_5 = (0,0,1) & a_6 = (0,1,1) & a_7 = (1,1,1) & a_8 = (1,0,1) \end{array}$$

und hier sind die p_i :

$$\begin{aligned}
p_1 &= (1-x_1)(1-x_1)(1-x_3) & p_2 &= (1-x_1)x_2(1-x_3) \\
p_3 &= x_1x_2(1-x_3) & p_4 &= x_1(1-x_2)(1-x_3) \\
p_5 &= (1-x_1)(1-x_1)x_3 & p_6 &= (1-x_1)x_2x_3 & p_7 &= x_1x_2x_3 \\
p_8 &= x_1(1-x_2)x_3
\end{aligned}$$

Nach diesem Prinzip lassen sich alle Basispolynome konstruieren.

6.2 n-Rechteck vom Typ 2

K = ein n-Rechteck

$P = Q_2 \quad \dim(P) = 3^n$

$\Sigma = \{ p(a_i), p(a_{ij}) \}$



Abbildung 8: Links: 1-Rechteck Typ 2, Rechts: 2-Rechteck Typ 2

Hier werde ich nur die zugehörigen Basispolynome für $n = 2$ angeben:

$$p_1 = (1-x_1)(2(1-x_1)-1)(1-x_2)(2(1-x_2)-1)$$

$$p_2 = (1-x_1)(2(1-x_1)-1)x_2(2x_2-1)$$

$$p_3 = x_1(2x_1-1)x_2(2x_2-1)$$

$$p_4 = (x_1(2x_1-1)(1-x_2)(2(1-x_1)-1)$$

$$p_5 = -4(1-x_1)(2(1-x_1)-1)(1-x_2)((1-x_2)-1)$$

$$p_6 = -4(1-x_1)((1-x_1)-1)x_2(2x_2-1)$$

$$p_7 = -4x_1(x_1-1)x_2(x_2-1)$$

$$p_8 = -4(x_1(2x_1-1)(1-x_2)((1-x_1)-1)$$

$$p_9 = 16x_1(1-x_1)x_2(1-x_2)$$

7 Triangulationen und Lösung des Problems

7.1 Der Raum der finiten Elemente

Nachdem wir nun die Finiten Elemente eingefügt haben und ihre abstrakten Eigenschaften untersucht haben, wollen wir uns wieder an das ursprüngliche Problem erinnern, und nun den Raum V_h in dem wir arbeiten wollen konstruieren. Genauer werden wir hier nicht einen beliebigen Unterraum verwenden, sondern uns auf den *Raum der konformen finiten Elemente* X_h einschränken. Dieser Raum soll die folgenden Bedingungen erfüllen:

7.1.1 FEM 1

Seien die K_i die Gebiete von finiten Elemente und \mathcal{T}_h eine Anordnung von Finiten Elementen, dann nennen wir \mathcal{T}_h eine Triangulation, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- \mathcal{T}_h1 $\bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$
- \mathcal{T}_h2 Alle K sind abgeschlossen und ihr Inneres ist nicht leer.
- \mathcal{T}_h3 Es gilt $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- \mathcal{T}_h4 Für jedes K ist ∂ lipschitzstetig.
- \mathcal{T}_h5 Jede Seite eines jeden K_i ist eine Untermenge des Randes $\partial\Omega$
— oder eine Seite eines anderen K_j , $i \neq j$.

7.1.2 FEM 2

Die P_K enthalten tatsächlich Polynome.

7.1.3 FEM 3

Es gibt eine „kanonische“ Basis des X_h , so dass die Träger der Basisfunktionen möglichst klein sind.

Wozu ist das gut? Wir werden auf der Grundlage dieser Triangulation ein Gleichungssystem in X_h angeben können, dass das gestellte Problem löst.

Aus den einzelnen Bedingungen folgern wir zunächst, dass unsere Triangulation bzw. die interpolierten Funktionen auf ihnen die Bedingungen erfüllen, die wir zu Beginn an unser Problem gestellt haben.

7.2 Die Stetigkeit der Funktionen in X_h

Zunächst erinnern wir uns, dass wir uns in einem Unterraum befinden, d.h. dass sich die die Eigenschaft der schwachen Ableitbarkeit ohnehin verehrt. Wir müssen also nur die Stetigkeit der Funktionen in X_h überprüfen bzw. die einfach stetige Differenzierbarkeit falls wir ein Problem 4. Ordnung betrachten. Ich werde mich hier wie auch schon im Vortrag darauf beschränken, die Gültigkeit der Stetigkeitsaussage für den Fall von n-Simplizes des Typs 1 und

2 und $n = 2$ zu behandeln. Betrachten wir eine Triangulation, so sehen wir, dass die gemeinsamen Seiten zweier aneinander grenzender Finiter Elemente eine Einschränkung auf einen eindimensionalen Unterraum bilden. Auf diesem Unterraum ist also die Dimension des Polynomraumes eingeschränkt, und zwar ist die Dimension genau 2 bzw. 3. Dies ist aber genau die Anzahl der Freiheitsgrade die auf dem entsprechenden Unterraum zu finden ist, d.h. eine Triangulation mit diesen Elementen erfüllt die Stetigkeitsbedingung. Damit klar wird, dass nicht alle Finiten Elemente diese Forderung erfüllen, gebe ich hier ein Gegenbeispiel an:

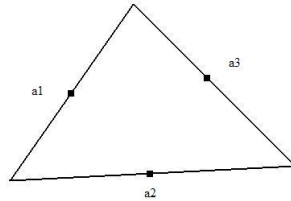


Abbildung 9: Gegenbeispiel zur Stetigkeit

Betrachten wir nun eine Seite, so ist die Dimension des Polynomunterraumes 2, aber es befindet sich nur ein Freiheitsgrad auf diesem Raum, womit es möglich ist, dass die Einschränkung der Funktionen auf die Ränder von beiden finiten Elementen gebildet werden nicht identisch sind womit die Funktionszusammenfügung an dieser Seite nicht stetig wäre.

7.3 Triangulation von Hermiten Finiten Elementen

7.4 Die Lösung des Problems

Sei X_h unter Erfüllung aller obigen Voraussetzungen konstruiert und seien alle Freiheitsgrade vom Typ (1). Dann definieren wir

$$\Sigma_h := \{\Phi_{i,K}, K \in \mathcal{T}_h, 1 \leq N_K\} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$$

und setzen $M := \#\Sigma_h$

Dann können wir Basisfunktionen im X_h angeben:

$$w_j = \sum_{K, a_j \in K} p_{j,K}|_K$$

und können das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\sum_{i=1}^M a(w_i, w_l) u_i = f(w_l)$$

und $u_h = \sum_{i=1}^M u_i w_i$ ist die gesuchte Lösung unserer Differentialgleichung.