Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006

Prof. Dr. M. Griebel

Aufgabenblatt 9

Abgabe der Lösungen: 27.06. in der Vorlesung
Abgabe der Programmieraufgaben: 26.06.-30.06. im CIP-Pool

Aufgabe 1 (Newton-Verfahren):

a) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton–Verfahrens zur Berechnung der positiven Nullstelle von $f(x) = x^n - a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ an. Zeigen Sie, daß die Newton–Iteration in diesem Fall für jeden Startwert $x_0 > 0$ konvergiert.

b) Sei $p(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$, welches nur reelle Nullstellen besitzt. Die größte Nullstelle von p sei x^*. Zeigen Sie, daß das Newton–Verfahren für jeden Startwert $x_0 > x^*$ eine streng monoton fallende Folge mit Grenzwert x^* definiert.

5 Punkte

Aufgabe 2 (Inversion und Division): Wir wollen nun das Newton–Verfahren zur Berechnung von $x = 1/a$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ betrachten, d.h. wir suchen die Nullstelle von $f(x) = 1/x - a$.

a) Zeigen Sie, daß die zugehörige Iterationsvorschrift folgende Gestalt hat:

$$x_{k+1} = x_k + x_k \cdot (1 - a x_k), \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, ...$$

Mit welchen arithmetischen Operationen kann man somit die Division b/a approximieren?

b) Zeigen Sie, daß für den Fehler $\epsilon_k = x_k - 1/a$ die Rekursion $\epsilon_{k+1} = -a \cdot (\epsilon_k)^2$ gilt.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\epsilon_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k}, \quad \text{mit } \rho = |a x_0 - 1|.$$

Welche Bedingung für ρ bzw. x_0 ist hinreichend und notwendig für globale Konvergenz des Iterationsverfahrens? Wie groß ist die Konvergenzrate?

d) Es sei $1/2 \leq a \leq 1$ und $x_0 = 1.5$. Bestimmen Sie die (maximale) Anzahl der erforderlichen Additionen und Multiplikationen zur Berechnung von $1/a$ auf 24 bzw. 56 Dualstellen.

6 Punkte

Aufgabe 3 (Programmieraufgabe): Implementieren Sie das Newton-Verfahren, das Regula-Falsi sowie das Bisektionsverfahren. Betrachten Sie die drei Funktionen

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x-2)\cdot(x-1), \\ f_2(f) &= (x-2)^3, \\ f_3(f) &= (x-2)^5. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen mit Hilfe der obigen Verfahren. Hierbei sei die approximierte Nullstelle des Bisektionsverfahrens durch den Mittelpunkt des Intervalls gegeben. Verwenden Sie bei dem Newton-Verfahren den Startwert $x_0 = 100$, bei dem Regula-Falsi Verfahren die Werte $x_0 = 50$ und $x_1 = 100$ und für das Bisektionsverfahren die Werte $a = 1.5$ und $b = 100$ als Intervallgrenzen.

b) Plotten Sie für jede der drei Funktionen den Fehler in Abhängigkeit von der Anzahl an Iterationen für alle drei Verfahren in jeweils ein Schaubild.

15 Punkte