Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006
Prof. Dr. M. Griebel

Aufgabenblatt 7

Abgabe der Lösungen: 01.06. in der Vorlesung

Aufgabe 1 [Euler-MacLaurin Darstellung]: Betrachten Sie das Integral

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

einer Funktion $f \in C^{2r}$ mit $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b)$ für $0 \le i \le l$.

a) Geben Sie den Fehler der Trapezsumme $T(h)$ in Abhängigkeit von r und l an.

b) Wie groß ist hier jeweils die Konvergenzordnung (in h)?

(c) Angenommen, f sei beliebig oft differenzierbar ($r = \infty$) und periodisch ($l = \infty$). Kann man dann mit einer Trapezsumme das Integral $I(f)$ exakt berechnen?

4 Punkte

Aufgabe 2 (Hierarchische Basis): Für $l \in \mathbb{N}$ und $0 \le i \le 2^l$ betrachten wir Punkte $x_{li} = ih_l \in [0,1]$, mit $h_l := 2^{-l}$. Wie in der Vorlesung können wir nun eine Funktion $f \in C^2([0,1])$ mit Hilfe der hierarchischen Basis φ_{li} und der hierarchischen Koeffizienten $f_{li} := f(x_{li}) - 0.5(f(x_{li-1}) + f(x_{li+1}))$ durch $f = \sum_{l,i} f_{li}\varphi_{li}$ darstellen. Man zeige die folgende Abschätzung für die hierarchischen Koeffizienten

$$|f_{li}| \le c2^{-2l}\|\partial_{xx} f\|_\infty$$

mit $c > 0$ unabhängig von f, l und i.

5 Punkte

Aufgabe 3 (Romberg Verfahren):

a) Berechnen Sie

$$I(f) = \int_0^1 x^5\ dx$$

mit Hilfe des Romberg–Verfahrens

$$T_{ik} = T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{(h_{i-k}/h_i)^2 - 1}$$

für die Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = 1/2$ und $h_2 = 1/4$.

b) Wie groß ist in diesem Fall der numerische Integrationsfehler?

c) Geben Sie die Integrationsformeln T_{21} und T_{22} an. Zeigen Sie, daß T_{22} der Milne–Regel entspricht.

d) Zeigen Sie, daß die Formel T_{11} für die Schrittweiten $h_0 = 1$ und $h_1 = 1/3$ gerade die 3/8–Regel ergibt.

6 Punkte

Aufgabe 4 (Adaptive Quadratur): Zur numerischen Berechnung des Integrals

$$I(f) = \int_a^b f(x)\ dx$$

betrachte man die Simpsonregel

$$S = \frac{(b-a)}{6} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

sowie die Simpsonsumme

$$T = \frac{(b-a)}{12} \cdot \left(f(a) + 4f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + f(b) \right)$$

a) Geben Sie den Fehler der extrapolierten Regel

$$U = T + \frac{T-S}{15}$$

an.

b) Wir wollen nun $[a,b]$ in zwei Hälften $[a,(a+b)/2]$, $[(a+b)/2,b]$ verfeinern, falls

$$|T - S| > \varepsilon \cdot (b-a)$$

und die beiden Teilintervalle separat integrieren. Dieser Vorgang wird rekursiv weitergeführt, falls der Fehler in dem jeweiligen Teilintervall immer noch zu groß ist. Integrieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ im Intervall $[-1,1]$ auf diese Weise adaptiv für $\varepsilon = 0.01$. Verwenden Sie jeweils U als endgültige Näherung der Teilintegrale.

c) Vergleichen Sie den geschätzen Integrationsfehler aus (b) mit dem wahren Integrationsfehler.

d) Geben Sie eine Funktion f an, bei der obiges adaptives Verfahren scheitert, d.h. der wahre Integrationsfehler sehr viel größer als der geschätzte Integrationsfehler ist und das Verfahren zu früh abbricht.

6 Punkte