



## Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006

Prof. Dr. M. Griebel

### Aufgabenblatt 6

Abgabe der Lösungen: 23.05. in der Vorlesung

**Aufgabe 1** (Quadratur von Polynomen):

- a) Zeigen Sie, daß die Simpson-Regel für alle Polynome vom Grad 3 exakt ist, d.h. für alle kubischen Polynome  $P$  gilt:

$$\int_a^b P(x) dx = \frac{b-a}{6}P(a) + \frac{2(b-a)}{3}P\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{b-a}{6}P(b).$$

- b) Wir betrachten nun das Integral eines normierten quartischen Polynoms  $Q$ , d.h.

$$I(f) = \int_a^b Q(x) dx \quad \text{mit} \quad Q(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(mit  $a_i \in \mathbb{R}$  für  $i = 0, 1, 2, 3$ ). Zur näherungsweisen Berechnung von  $I$  soll die Simpsonsumme  $S(h)$  mit Intervall-Länge  $h$  verwendet werden. Zeigen Sie, daß dann für den Integrationsfehler

$$I(f) - S(h) \leq (b-a) \frac{h^4}{120}$$

gilt.

4 Punkte

**Aufgabe 2** (Anwendung von Quadraturformeln): Betrachten Sie das Integral

$$I(f) = \int_0^2 \frac{2}{x^2 + 4} dx.$$

- a) Berechnen Sie  $I(f)$  mit der Trapezregel und der Simpsonregel.
- b) Schätzen Sie jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.
- c) Berechnen Sie  $I(f)$  mit der Trapezsumme und der Simpsonsumme für  $h = \frac{1}{2}$ .
- d) Schätzen Sie auch hier jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.
- e) Wie klein müßte jeweils  $h$  gewählt werden, damit der Integrationsfehler kleiner als  $10^{-6}$  wird?

10 Punkte