universitätbonn

Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006

Prof. Dr. M. Griebel

Aufgabenblatt 5

Abgabe der Lösungen: 18.05. in der Vorlesung

Aufgabe 1: Man zeige für die B-Splines $B_{i,r}$:

a) Für $x \notin [t_i, t_{i+r}]$ gilt $B_{i,r}(x) = 0$.

b) Für $t_i < x < t_{i+r}$ gilt $B_{i,r}(x) > 0$.

5 Punkte

Aufgabe 2: Es seien Knoten $\cdots < \ t_i \ < \ t_{i+1} \cdots < \ t_{i+k} \ < \cdots$ gegeben. Zeigen Sie:

a) Ein B-Spline $B_{i,k}(x)$ hat nur ein Extremum –und zwar ein Maximum– auf seinem Träger $[t_i, t_{i+k}]$.

b) Es gibt keine nichttriviale Splinefunktion mit einem kleinerem Träger als ein B-Spline hat, genauer: zu obigen Knoten gibt es kein Element aus $S_{k,\Delta}$, das einen Träger in $[t_i, t_{i+k-1}]$ hat.

6 Punkte

Aufgabe 3: Gegeben seien äquidistante Knoten $t_i := x_i < x_{i+1} =: t_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$, d.h. es gilt $x_{i+1} - x_i = h$ für ein $h > 0$ fest unabhängig von i.

a) Bestimmen Sie für die quadratischen B-Splines $B_{i,3}$ und die kubischen B-Splines $B_{i,4}$ deren Werte an den Knoten x_i.

b) Geben Sie $B_{i,2}(x)$ und $B_{i,3}(x)$ in der Darstellung

$$B_{i,2}(x) \ = \begin{cases} ? & \text{für} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[\\ ? & \text{für} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}[\\ ? & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$B_{i,3}(x) \ = \begin{cases} ? & \text{für} \quad x \in [x_i, x_{i+1}[\\ ? & \text{für} \quad x \in [x_{i+1}, x_{i+2}[\\ ? & \text{für} \quad x \in [x_{i+2}, x_{i+3}[\\ ? & \text{sonst} \end{cases}$$

an.

c) Der kubische Spline

$$S(x) \ = \ \sum_{k=-3}^{n-1} c_k B_{k,4}(x)$$

interpoliere $f(x)$ an den Knoten x_i, $i = 0, \ldots, n$ und genüge den Randbedingungen $S'(x_0) = f'(x_0)$, $S'(x_n) = f'(x_n)$. Die Unbekannten c_k erhält man durch Auflösung eines speziellen linearen Gleichungssystems $Ac = b$ mit $c = (c_{-3}, c_{-2}, \ldots, c_{n-1})^T$ und $b = (f'(x_0), f(x_0), \ldots, f(x_n), f'(x_n))^T$. Geben Sie die Koeffizientenmatrix A an.

d) Der quadratische Spline

$$Q(x) \ = \ \sum_{k=-2}^{n-1} d_k B_{k,3}(x)$$

mit Knoten $x_i = a + ih$, $i = 0, \ldots, n$ interpoliere $f(x)$ an den Stellen x_0, $\zeta_i := x_i + h/2$, $i = 0, \ldots, n-1$ und x_n. Die Unbekannten d_k erhält man durch Auflösung eines anderen Gleichungssystems $Ad = b$ mit $d = (d_{-2}, d_{-1}, \ldots, d_{n-1})^T$ und $b = (f(x_0), f(x_0 + h/2), \ldots, f(x_n - h/2), f(x_n))^T$. Geben Sie auch hier die Koeffizientenmatrix A an.

8 Punkte