Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006

Prof. Dr. M. Griebel

Aufgabenblatt 4

Abgabe der Lösungen: 11.05. in der Vorlesung
Abgabe der Programmieraufgaben: 22.05.-26.05. im CIP-Pool

Aufgabe 1 (Konstruktion von Splines): Gegeben sei eine Unterteilung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ des Intervalls $[a, b]$. Der kubische Spline $S_\Delta(x)$ interpoliere eine Funktion $f(x)$ an den Punkten x_i, $0 \le i \le n$.

a) Zeigen Sie, daß S_Δ die stückweise Darstellung

$$S_\Delta(x) = f(x_i)(1 - 3t_i^2 + 2t_i^3) + f(x_{i+1})(3t_i^2 - 2t_i^3) + z_i h_i(t_i - 2t_i^2 + t_i^3) + z_{i+1}h_i(-t_i^2 + t_i^3)$$

hat, wobei

$$z_i = S'_\Delta(x_i) \text{ für } 0 \le i \le n,$$

sowie

$$x_i \le x \le x_{i+1},\ t_i = (x - x_i)/h_i \text{ und } h_i = x_{i+1} - x_i \text{ für } 0 \le i \le n-1.$$

b) In dieser Darstellung sind die Ableitungen z_i die einzigen Unbekannten. Leiten Sie nun aus der Forderung, daß $S''_\Delta(x)$ stetig ist, die $n-1$ Gleichungen

$$\frac{z_{i-1}}{h_{i-1}} + 2z_i\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right) + \frac{z_{i+1}}{h_i} = 3\left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_{i-1}^2} + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i^2}\right)$$

für $1 \le i \le n-1$, her.

c) Jetzt fehlen noch zwei Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten z_i. Geben Sie das zu lösende lineare Gleichungssystem für die natürlichen Randbedingungen

$$S''_\Delta(a) = S''_\Delta(b) = 0$$

in Matrixnotation an.

d) Mit welchem Aufwand läßt sich das lineare Gleichungssystem lösen?

5 Punkte

Aufgabe 2 (Berechnung von Splines): Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2 - |x|$ im Intervall $[-1, 1]$.

a) Interpolieren Sie f an den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ durch einen kubischen Spline $S_1(x)$ mit den (natürlichen) Randbedingungen

$$S_1''(x_0) = S_1''(x_2) = 0.$$

b) Verwenden Sie nun einen kubischen Spline $S_2(x)$, der die vollständigen Randbedingungen

$$S_2'(x_0) = f'(x_0) \text{ und } S_2'(x_2) = f'(x_2)$$

erfüllt.

c) Ermitteln Sie jetzt das Polynom $P(x)$ vom Grad 4 für die Randbedingungen

$$P'(x_0) = f'(x_0) \text{ und } P'(x_2) = f'(x_2).$$

d) Berechnen Sie für a) bis c) jeweils den Interpolationsfehler in der L_∞–Norm.

6 Punkte

Aufgabe 3 (Fehlerabschätzung): Gegeben sei wiederum eine Unterteilung $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ des Intervalls $[a, b]$ und eine Funktion $f \in C^2[a, b]$. Weiterhin sei S_Δ der interpolierende kubische Spline–Interpolant von f bezüglich Δ mit den (vollständigen) Randbedingungen

$$S'_\Delta(a) = f'(a) \text{ und } S'_\Delta(b) = f'(b).$$

a) Beweisen Sie, daß für alle Funktionen $T(x)$ aus dem Splineraum $\mathcal{K}^3[a, b]$

$$||f''(x) - S''_\Delta(x)||_2 \leq ||f''(x) - T''(x)||_2$$

gilt.

b) Sei nun $f \in C^4[a, b]$. Zeigen Sie:

$$||f''(x) - S''_\Delta(x)||_2^2 = \int_a^b (f(x) - S_\Delta(x))f^{(4)}(x)\, dx.$$

c) Sei $\Gamma = \{a = \bar{x}_0 < \ldots < \bar{x}_m = b\}$ eine Verfeinerung von Δ (d.h. $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \{\bar{x}_0, \ldots, \bar{x}_m\}$). Weiterhin sei S_Γ der interpolierende kubische Spline–Interpolant zu f bezüglich Γ mit vollständigen Randbedingungen. Zeigen Sie, daß dann folgende Ungleichungen gelten:

$$||S''_\Delta(x)||_2 \leq ||S''_\Gamma(x)||_2 \leq ||f''(x)||_2.$$

5 Punkte

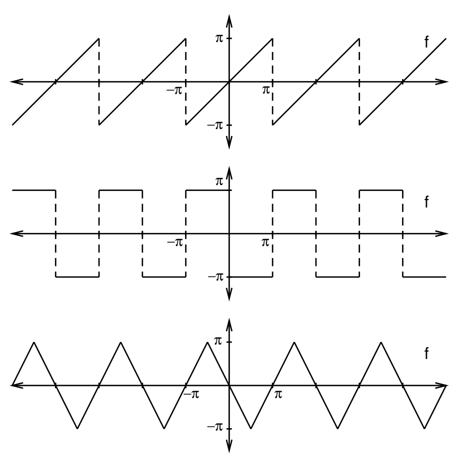
Aufgabe 4 (Programmieraufgabe): Seien die Funktionswerte einer periodischen Funktion f im Intervall $[-\pi, \pi)$ an den $n = 2^k$ Punkten x_j, $0 \leq j < n$, mit $x_j = -\pi + 2\pi j/n$ gegeben.

a) Schreiben Sie ein Programm, basierend auf der FFT, zur schnellen Berechnung der Koeffizienten des trigonometrischen Interpolationspolynoms

$$p(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n/2-1} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) + a_{n/2}/2 \cos(xn/2).$$

b) Schreiben Sie ein Programm zur schnellen Auswertung eines solchen trigonometrischen Polynoms in den Stützstellen basierend auf der inversen FFT.

Betrachten Sie als Beispiele die für die Signalverarbeitung nachfolgend dargestellen wichtigen Schwingungstypen (Sägezahn-, Rechteck-, und Dreieck-Schwingung).



c) Ermitteln Sie die Koeffizienten für diese drei Beispiele für $k = 0, 2, 4, 6$ mit dem entsprechenden Programm.

15 Punkte