Praktische Mathematik II

Sommersemester 2006
Prof. Dr. M. Griebel

Aufgabenblatt 3

Abgabe der Lösungen: 04.05.2006 in der Vorlesung

Aufgabe 1 (Orthogonalitätsrelation):

Für $N > 0$ fest betrachten wir die Punkte $x_k = -\pi + 2\pi k/N$, $0 \leq k < N$ und definieren die Vektoren $w_j := (\omega_0^j, \omega_1^j, \ldots, \omega_{N-1}^j) \in \mathbb{C}^N$, $\omega_j := \exp(ix_j)$, für $0 \leq j < N$. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$< w_j, w_k >:= \sum_{l=0}^{N-1} \omega_l^j \omega_l^{-k} = \begin{cases} N \text{ für } j = k \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

erfüllen.

5 Punkte

Aufgabe 2: Wir betrachten auf $[-\pi, \pi)$ die Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \pi - |x|$ sowie die Stützstellen $x_k = -\pi + 2\pi k/4$, $0 \leq k < 4$.

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k des trigonometrischen Interpolationspolynoms $p(x)$ $(p(x_k) = f(x_k))$

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x)) + \frac{a_2}{2} \cos(2x).$$

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten β_k des trigonometrischen Polynoms $\bar{p}(x)$,

$$\bar{p}(x) = \sum_{k=0}^{2} \beta_k \exp(ikx)$$

dass unter allen anderen trigonometrischen Polynomen der Form $q(x) = \sum_{k=0}^{2} \zeta_k \exp(ikx)$, $\zeta_k \in \mathbb{R}$, das quadratische Funktional

$$S(q) = \sum_{k=0}^{4} |f(x_k) - q(x_k)|^2$$

minimiert.

5 Punkte

Aufgabe 3: Es bezeichne $F_N f$ die diskrete Fouriertransformierte von f, wobei $N = 2^M$ und $M \in \mathbb{N}$. Zur Vereinfachung der Notation wird $F_N f$ per $(F_N f)_k = (F_N f)_{k+N}$ periodisch fortgesetzt.
a) Für $f \in \mathbb{C}^N$ gilt $(\overline{F_N f})_k = (F_N \overline{f})_{N-k}$, für $f \in \mathbb{R}^N$ folgt insbesondere $(\overline{F_N f})_k = (F_N f)_{N-k}$.
b) Für $f \in \mathbb{R}^N$ ist die direkte Berechnung von $F_N f$ ineffizient, da die verschwindenden Imaginärteile mitgeführt werden. Besser ist es, die Fouriertransformation für den Vektor

$$g \in \mathbb{C}^{N/2}, \qquad g_k = f_{2k} + i f_{2k+1}$$

der halben Länge durchzuführen. Zeigen Sie, dass man dann $F_N f$ über

$$(F_N f)_k = \frac{(F_{N/2} g)_k + (\overline{F_{N/2} g})_{N/2-k}}{4} + e^{2\pi i k/N} \frac{(F_{N/2} g)_k - (\overline{F_{N/2} g})_{N/2-k}}{4i}, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

erhält. (Wegen a) genügt es sogar, nur die Hälfte von $(F_N f)$ abzuspeichern.)

6 Punkte

Aufgabe 4: Zu einem Vektor $f \in \mathbb{R}^N$ ist die diskrete Kosinustransformierte $C_N f$ durch

$$(C_N f)_k = \frac{\alpha_k}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos \frac{\pi \left(j + \frac{1}{2}\right) k}{N}, \qquad \alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 2 & \text{für } k = 1, \ldots, N-1 \end{cases}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass die inverse diskrete Kosinustransformierte durch

$$(C_N^{-1} g)_j = \sum_{k=0}^{N-1} g_k \cos \frac{\pi \left(j + \frac{1}{2}\right) k}{N}$$

gegeben ist.

b) Führen Sie die Berechnung der diskreten Kosinustransformierten auf die Berechnung der diskreten Fouriertransformierten eines geeignet gewählten Vektors $\tilde{f} \in \mathbb{R}^{2N}$ zurück.

5 Punkte