Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

universitätbonn

Aufgabenblatt 11

Ausgabe: 7.7.2005, Abgabe der Lösungen: 14.7.2005, 10:10

Klausur: Dienstag 19.7.2005, 10:15-13:15, Großer Hörsaal der Mathematik
Nachklausur: Mittwoch 24.8.2005, 9:00-12:00 Uhr, Kleiner Hörsaal der Mathematik
Achtung: geänderter Termin!

Aufgabe 42:
Zur numerischen Differentiation einer glatten Funktion f sei die Näherungsformel

$$f^{(j)}(0) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_f^{(j)}(0) \tag{$*$}$$

mit Gewichten A_k und paarweise verschiedenen Stützstellen $x_k \in [-a, a]$, $a > 0$ gegeben, wobei $R_f^{(j)}(0)$ den Restterm bezeichnet.
a) Zeige, dass die Formel $(*)$ genau dann für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_n$ exakt ist, d.h. $R_f^{(j)}(0) = 0$ gilt, wenn

$$\sum_{k=0}^{n} A_k p(x_k) = L_n^{(j)}(p; 0)$$

gilt. Hierbei bezeichnet L_n das zugehörige Lagrange-Interpolationspolynom.
b) Zeige, dass die Formel $(*)$ genau dann für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_{n+1}$ exakt ist, wenn

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

zusätzlich $\omega^{(j)}(0) = 0$ erfüllt.
c) Zeige, dass sie im Fall $1 \leq j \leq n+2$ nicht für alle Polynome $p \in \mathcal{P}_{n+2}$ exakt sein kann.
Hinweis: Betrachte $p(x) = xw(x)$. (10 Punkte)

Aufgabe 43:
Die Eulersche Zahl e soll mittels eines Extrapolationsverfahrens näherungsweise berechnet werden.
a) Zeige, dass $T(h) = (1+h)^{1/h}$ für $h \neq 0$, $|h| < 1$ eine konvergente Entwicklung

$$T(h) = e + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h^i$$

besitzt, wobei die Konstanten $\alpha_i \in \mathbb{R}$ unabhängig von h sind.
b) Welche Vorteile bietet die Entwicklung

$$\tilde{T}(h) = \frac{T(h) + T(-h)}{2}$$

gegenüber der von T?
c) Wie ist $T(h)$ abzuändern, damit die Extrapolation für $h = 0$ einen Näherungswert für e^x liefert, wobei $x \in \mathbb{R}$ fest ist? (10 Punkte)

Aufgabe 44:
Betrachte die $\binom{m+d}{m}$ im Dreiecksschema angeordneten Stützstellen

$$\{x_\alpha = \alpha : \alpha \in J\},$$

wobei $d \in \mathbb{N}$ die Raumdimension, $m \in \mathbb{N}$ den Polynomgrad und J die Indexmenge

$$J = \{z \in \mathbb{N}_0^d : |z|_1 \leq m\}$$

bezeichnen. Zeige, dass es zu gegebenen Werten $f_\alpha \in \mathbb{R}$ für $\alpha \in J$ genau ein Polynom

$$p \in \mathcal{P}_m^d = \operatorname{span}\{x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} : \alpha \in J\}$$

mit $p(x_\alpha) = f_\alpha$ gibt.
Hinweis: Zerlege die Menge der Stützstellen in

$$\{x_\alpha : \alpha_d = 0\} \cup \{x_\alpha : \alpha_d > 0\}$$

und führe eine doppelte Induktion über d und m mit Hilfe des Ansatzes

$$p(x_1, \ldots, x_d) = p_1(x_1, \ldots, x_{d-1}) + x_d\, p_2(x_1, \ldots, x_d), \qquad p_1 \in \mathcal{P}_m^{d-1}, \quad p_2 \in \mathcal{P}_{m-1}^d$$

durch. (10 Punkte)

Aufgabe 45:
Die Nadeltechnik von Buffon aus dem Jahr 1777 zur Bestimmung der Konstanten π funktioniert folgendermaßen: Auf den Boden werden parallele Linien im Abstand d gezeichnet. Dann wird wiederholt eine Nadel der Länge d auf dieses Muster geworfen und geprüft, ob die Nadel eine der Linien berührt oder nicht.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Nadel eine Linie? Wie lässt sich π auf diese Weise Monte Carlo-ähnlich bestimmen? (10 Punkte)