Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005

Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 10

Ausgabe: 30.6.2005, Abgabe der Lösungen: 7.7.2005, 10:10

Aufgabe 38:
Berechne mit einem beliebigen numerischen Integrationsverfahren und einem Taschenrechner das Integral

$$\int_0^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

mit möglichst geringem Aufwand und einem absoluten Fehler von höchstens $\frac{1}{100}$. (10 Punkte)

Aufgabe 39:
Bezeichne $T_h(f)$ die Trapezregel zur Schrittweite h für das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Führe zwei Schritte des Rombergschemas durch, wobei die Schrittweite h jeweils halbiert wird. Beachte dabei, dass die Trapezregel die asymptotische Entwicklung

$$T_h(f) = \alpha_0 + \alpha_2 h^2 + \alpha_4 h^4 + \alpha_6 h^6 + \dots$$

besitzt, in der ungerade Potenzen von h nicht auftreten. Zeige, dass das Rombergschema nach einem Schritt zu der Simpsonregel und nach zwei Schritten zu der Milne-Regel aus Aufgabe 35 auf Übungsblatt 9 führt. (10 Punkte)

Aufgabe 40:
Die Gauß-Lobatto-Formeln zur numerischen Integration über dem Intervall $[a,b]$ entsprechen den Gauß-Formeln, jedoch sind die Stützstellen $x_0 = a$ und $x_n = b$ fest vorgegeben:

$$I_n(f) = \omega_0 f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i f(x_i) + \omega_n f(b).$$

a) Bestimme die $2n$ Freiheitsgrade $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ und $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, so dass I_n zu dem Polynomraum $\mathcal{P}_{2n-1}$ interpolatorisch ist.
b) Bestimme die Stützstellen und die Gewichte explizit für $n = 3$ und das Intervall $[a,b] = [-1,1]$. (10 Punkte)

Aufgabe 41:
Zum Intervall $[-1,1]$ seien Stützstellen $-1 \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le 1$ gegeben. I_n bezeichne die zugehörige Newton-Cotes-Formel.
a) Zeige, dass sich der Integrationsfehler für glatte Funktionen $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$|I(f) - I_n(f)| \le \frac{1}{(n+1)!} \left(\int_{-1}^1 \left| f^{(n+1)}(\xi(x)) \right|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

abschätzen lässt, wobei $\xi(x)$ eine von x abhängige Zwischenstelle bezeichnet.
b) Die Stützstellen sind also in einem gewissen Sinn optimal, wenn

$$\int_{-1}^1 \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \,\mathrm{d}x$$

minimal ist. Zeige, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Stützstellen den Nullstellen des Legendrepolynoms $P_{n+1}^{(0,0)}$ aus Aufgabe 23 auf Übungsblatt 6 entsprechen. (10 Punkte)