Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

universitätbonn

Aufgabenblatt 9

Ausgabe: 23.6.2005, Abgabe der Lösungen: 30.6.2005, 10:10
Abgabe der Programmieraufgabe: 11.7.-15.7.2005, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 34:
Zu einem Intervall $[a, b]$ betrachte die äquidistant verteilten Stützstellen $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Bezüglich dieser Stützstellen bezeichne $I_n(f)$ die (eindeutig bestimmte) Quadraturformel zum Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, die zum Polynomraum $\mathcal{P}_n$ interpolatorisch ist. Definiere

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad \text{und} \qquad \pi_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - i).$$

a) Zeige für glatte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und ungerades n die Fehlerabschätzung

$$I(f) - I_n(f) = \int_0^n \pi_n(t)\,\mathrm{d}t\, h^{n+2} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

b) Zeige, dass für gerades n

$$I(f) - I_n(f) = \int_0^n t\pi_n(t)\,\mathrm{d}t\, h^{n+3} \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}$$

gilt. Hierbei bezeichnet $\xi \in (a, b)$ jeweils eine Zwischenstelle.
Hinweis: Integriere partiell und verwende die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]f = [x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]f = \frac{f^{(n+2)}(\xi(x))}{(n+2)!}$$

für eine Zwischenstelle $\xi(x)$. (10 Punkte)

Aufgabe 35:
Konstruiere die 5-Punkte-Quadraturformel

$$I_4(f) = \sum_{i=0}^{4} a_i f(x_i), \qquad x_i = a + \frac{i}{4}(b - a),$$

bezüglich des Intervalls $[a, b]$, die zum Polynomraum $\mathcal{P}_4$ interpolatorisch ist. (10 Punkte)

Aufgabe 36:
a) Konstruiere eine Verallgemeinerung

$$Q_{[a,b]}(f) = a_0 f(a) + a_1 f(b) + a_2 f'(a) + a_3 f'(b)$$

der Trapezregel, so dass für glatte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - Q_{[a,b]}(f) \right| \leq C(b - a)^5$$

gilt. Hierbei hängt die Konstante C von f, aber nicht von a und b ab.
b) Wieviele Ableitungsterme sind für die zusammengesetzte Quadraturformel

$$(N \times Q)_{[a,b]}(f) = \sum_{i=0}^{N-1} Q_{\left[a+\frac{i}{N}(b-a),\, a+\frac{i+1}{N}(b-a)\right]}(f)$$

auszuwerten? (10 Punkte)

Aufgabe 37:
Zeige, dass die Quadraturformel

$$I_n(f) = \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$$

alle trigonometrischen Polynome

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin(kx)$$

vom Grad $< n$ über dem Intervall $[0, 2\pi]$ exakt integriert. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 4:
Schreibe ein C-, C++- oder Javaprogramm zur adaptiven Integration einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Hilfe der Simpsonregel:
Zu Beginn definiere das aktive Intervall $[\alpha, \beta]$ als $[a, b]$. Bestimme mittels der Simpsonregel die approximativen Integrale

$$S_{[\alpha,\beta]}(f) \qquad \text{und} \qquad \tilde{S}_{[\alpha,\beta]}(f) = S_{\left[\alpha, \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right]}(f) + S_{\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta), \beta\right]}(f)$$

sowie den a posteriori-Fehlerschätzer

$$E_{[\alpha,\beta]}(f) = \left| S_{[\alpha,\beta]}(f) - \tilde{S}_{[\alpha,\beta]}(f) \right|,$$

vgl. Herleitung in der Vorlesung. Gilt

$$\frac{1}{10} E_{[\alpha,\beta]}(f) \leq \varepsilon \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

für eine vorgegebene absolute Fehlertoleranz ε, so verwende den Wert $\tilde{S}_{[\alpha,\beta]}(f)$ als Approximation für $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ und beginne den Prozess von vorne mit dem neuen aktiven Intervall $[\beta, b]$. Ansonsten verfeinere das aktive Intervall durch Halbierung, d.h. beginne wieder mit dem neuen aktiven Intervall $[\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)]$. Ferner soll eine vorgegebene minimale Breite δ des aktiven Intervalls nicht unterschritten werden, d.h. es soll stets $\beta - \alpha \geq \delta$ gelten. Der ganze Prozess wird wiederholt, bis das Intervall $[a, b]$ vollständig abgearbeitet ist. Teste das Programm für verschiedene Parameter ε und δ anhand der Funktionen

$$f(x) = e^x \qquad \text{und} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

über dem Intervall $[a, b] = [0, 1]$. Wie hoch ist der absolute Fehler? An welchen Stellen findet die automatische Verfeinerung statt? (10 Punkte)