Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 8

Ausgabe: 16.6.2005, Abgabe der Lösungen: 23.6.2005, 10:10

Aufgabe 30:
Für $0 \leq r \leq k-2$ und

$$\Delta := \{a = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \tau_{n+1} = b\}$$

sei $S_{k,r}(\Delta)$ der Raum der stückweisen Polynome vom Grad $k-1$ in $C^r[a,b]$. Man zeige, dass er d-dimensional ist, $d = k + n(k-1-r)$ mit Basisfunktionen x^j, $0 \leq j \leq k-1$, und den abgebrochenen Potenzen $\{(x-\tau_i)_+^l\}_{l=r+1,i=1}^{k-1,n}$. Insbesondere hat jedes $s(t) \in S_{k,r}(\Delta)$ die Darstellung

$$s(t) = p(t) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=r+1}^{k-1} \alpha_{i,l}(t-t_i)_+^l.$$

Die Koeffizienten $\alpha_{i,l}$ und $p(t)$ sind eindeutig bestimmt durch

$$p(t) = s(t)|_{(-\infty,t_1)}, \qquad l!\,\alpha_{i,l} = s^{(l)}(t_i^+) - s^{(l)}(t_i^-).$$

(10 Punkte)

Aufgabe 31:
Es seien $\cdots < \tau_i < \tau_{i+1} \cdots < \tau_{i+k} < \cdots$ einfache Knoten. Zeige

a) ein B-Spline $N_{i,k}(x)$ hat nur ein Extremum –und zwar ein Maximum– auf seinem Träger $[\tau_i, \tau_{i+k}]$.

b) es gibt keine nichttriviale Splinefunktion mit einem kleinerem Träger als ein B-Spline hat, genauer: zu obigen Knoten gibt kein Element aus $S_{k,\Delta}$, das einen Träger in $[\tau_i, \tau_{i+k-1}]$ hat.

Hinweis: Man benütze den Satz von Rolle. (10 Punkte)

Aufgabe 32:
Es seien

$$N_{r,k}(x) = (b-a)\,[a,...,a,b,...,b]\,(t-x)_+^{k-1} \qquad 0 \leq r \leq k-1.$$

die B-Splines mit Träger auf $[a,b]$, wobei die Punkte a,b in der (auf die Variable t wirkenden) dividierten Differenz $(r+1)$-fach bzw. $(k-r)$-fach auftreten. Man zeige, dass sie die Form

$$N_{r,k}(x) = \binom{k-1}{r}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^r \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{k-1-r} \quad , \quad 0 \leq r \leq k-1$$

haben. Im Spezialfall $a = 0$, $b = 1$ und $k-1-r$ statt r sind dies gerade die Bernstein-Polynome

$$p_{r,k-1}(x) = \binom{k-1}{r}(1-x)^r x^{k-1-r}.$$

Wie lauten die Rekursionsformeln der B-Splines für sie? (10 Punkte)

Aufgabe 33:
Für L_1-integrierbare Funktionen f, g (mit kompaktem Träger) auf $\mathbb{R}$ sei die Faltung definiert durch

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Weiter sei $\chi(x)$ die charakteristische Funktion von $[0,1]$.
Ist $\{j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ die Knotenfolge der ganzen Zahlen, so zeige, dass die zugehörigen B-Splines $N_{j,k}(x)$ translationsinvariant sind, d.h. $N_{j,k}(x) = N_{0,k}(x-j)$ genügen, und durch

$$N_{0,1}(x) := \chi(x), \qquad N_{0,k}(x) := (N_{0,k-1} * N_{0,0})(x), \quad k \leq 2$$

definiert werden können. (10 Punkte)