Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 7

Ausgabe: 9.6.2005, Abgabe der Lösungen: 16.6.2005, 10:10

Aufgabe 26 :
Es sei $\Gamma_N^{(d)}$ der Raum aller d-dimensionalen, N-periodischen Vektoren der Form

$$\mathbf{f} = \{f_{k_1 k_2 \cdots k_d}\}_{k_i=0}^{N-1}.$$

a) Die d-dimensionale diskrete Fouriertransformation $\mathbf{g} = F_N^{(d)}\mathbf{f} \in \Gamma_N^{(d)}$ ist definiert durch

$$g_{m_1 m_2 \cdots m_d} = \frac{1}{N^d} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_d=0}^{N-1} f_{k_1 \cdots k_d} \omega_N^{-k_1 m_1 \cdots \ -k_d m_d} \qquad \text{mit} \qquad \omega_N := e^{-2\pi i/N}.$$

Man zeige, dass $F_N^{(d)}$ eine bijektive lineare Abbildung von $\Gamma_N^{(d)}$ nach $\Gamma_N^{(d)}$ ist und die inverse diskrete Fouriertransformation $\mathbf{f} = F_N^{-1}\mathbf{g}$ gegeben ist durch

$$(F_N^{(d)})^{-1} = N^d \ \bar{F}_N^{(d)}.$$

b) Durch Reduktion auf den 1-dimensionalen Fall zeige man, dass die d-dimensionale diskrete Fouriertransformation mit $dn^d \ log_2 \ n$ Multiplikationen bzw. Punktoperationen durchführbar ist. (10 Punkte)

Aufgabe 27:
a) Für $\vec{a}, \vec{b} \in \Gamma_N$ sei die diskrete Faltung $\vec{c} := \vec{a} * \vec{b}$ durch $c_k := \sum_{j=0}^{N-1} a_{k-j} b_j$ definiert. Man zeige

$$F_N(\vec{a} * \vec{b})_l = F_N(\vec{a})_l \ F_N(\vec{b})_l \qquad \text{für} \qquad l \in \mathbb{Z}.$$

b) Für $N = 2^n, n \in \mathbb{N}$ zeige man, dass ein (reguläres) Gleichungssystem der Form

$$\sum_{j=0}^{N-1} a_{k-j} x_j \ = \ b_k, \qquad\qquad \text{für } \vec{a}, \vec{x}, \vec{b} \in \Gamma_N$$

nach den x_j mit $O(N \cdot \log_2 N)$ Punktoperationen auflösbar ist. (10 Punkte)

Aufgabe 28:
Das arithmetische Mittel der Fourier-Partialsummen für $f \in C_{2\pi}$ ist definiert durch

$$\sigma_n(f)(x) := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j(f)(x), \qquad S_j(f)(x) := \sum_{|k| \le j} (f, e^{ikx})_C \ e^{ikx}.$$

Man zeige die folgenden Eigenschaften:

a) $$\sigma_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} (1 - \frac{|k|}{n+1})(f, e^{ikx})_C \ e^{ikx},$$

b) $$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) F_n(x-y) \mathrm{d}y, \qquad F_n(x) := \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin(n+1)x/2}{\sin x/2} \right)^2,$$

c) $$1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(y) \mathrm{d}y.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 29:
Sei $S_{2,\Delta}$ die Menge der Polygonzüge mit Knoten

$$\Delta := \{a = t_0 < t_1 < \ \cdots \ < t_n < t_{n+1} = b\}.$$

Für $f \in C[a,b]$ bezeichne $S_2(f)$ den interpolierenden Polygonzug durch die Punkte $\{t_i, f(t_i)\}_{i=0}^{n+1}$.
Man beweise folgende Abschätzung und zeige, dass sie scharf ist, d.h. Gleichheit gelten kann:

$$\|f - S_2(f)\|_{\infty,[a,b]} \ \leq \ \frac{\bar{\Delta}^2}{8}\|f,\|_{\infty,[a,b]} \qquad\qquad \bar{\Delta} := \max_{0 \leq i \leq n}(t_{i+1} - t_i).$$

(10 Punkte)