Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 5

Ausgabe: 24.5.2005, Abgabe der Lösungen: 2.6.2005, 10:10

Aufgabe 18:
Beispiel zur Hermite-Birkhoff-Interpolation: Zeige, dass es kein Polynom $p \in \Pi_5$ mit

$$p(-1) = 1, \quad p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p''(-1) = 0, \quad p''(0) = 0 \quad \text{und} \quad p''(1) = 0$$

gibt. Zeige, dass es jedoch unendlich viele solcher Polynome gibt, wenn die Bedingung $p(-1) = 1$ durch $p(-1) = -1$ ersetzt wird. (10 Punkte)

Aufgabe 19:
a) Zeige, dass ein trigonometrisches Polynom

$$t \in T_n, \qquad t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(jx)$$

mit Koeffizienten $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ genau dann gerade ist, wenn alle Koeffizienten b_j null sind.
b) Zeige, dass das Cosinuspolynom $(\cos x)^n$ ein gerades trigonometrisches Polynom

$$(\cos x)^n = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n} \cos(jx)$$

mit führendem Koeffizienten $a_{n,n} = 2^{1-n}$ für $n \geq 1$ ist.
c) Zeige, dass $t \in T_n$ genau dann gerade ist, wenn es ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $t(x) = p(\cos(x))$ gibt.
d) Zeige, dass es zu paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [0, \pi)$ und Werten $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ genau ein gerades trigonometrisches Polynom $t \in T_n$ mit $t(x_j) = y_j$ gibt. (10 Punkte)

Aufgabe 20:
a) Gegeben sei ein reellwertiges trigonometrisches Polynom

$$t \in T_n, \qquad t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos(jx) + \sum_{j=1}^{n} b_j \sin(jx)$$

mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$. Zeige, dass t sich als

$$t(x) = \sum_{j=-n}^{n} c_j e^{ijx}$$

darstellen lässt und berechne die Koeffizienten $c_j \in \mathbb{C}$ aus den Koeffizienten a_j und b_j. Welche Relation zwischen c_j und c_{-j} folgt aus der Bedingung, dass t reellwertig ist?
b) Zeige, dass der Raum T_n der trigonometrischen Polynome wie in a) ein reeller Vektorraum der Dimension $2n + 1$ ist.
c) Definiere für $z \in \mathbb{C}$ das Laurent-Polynom

$$g(z) = \sum_{j=-n}^{n} c_j z^j.$$

Zeige, dass das Polynom $s(z) = z^n g(z)$ auf der Menge $\{z = e^{ix} | x \in [0, 2\pi)\}$ genau dann eine Nullstelle $z_k = e^{ix_k}$ hat, wenn $t(x)$ eine Nullstelle $x_k \in [0, 2\pi)$ besitzt.
d) Zu gegebenen paarweise verschiedenen Stützstellen $x_k \in [0, 2\pi)$ und Werten $y_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$, existiert genau ein trigonometrisches Polynom $t \in T_n$ mit $t(x_k) = y_k$.

e) Zeige, dass die Fundamentalpolynome

$$s_k(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{2n} \frac{\sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_k-x_j}{2}\right)}$$

die Eigenschaft $s_k(x_l) = \delta_{kl}$ besitzen. Damit besitzt das Interpolationspolynom die Darstellung

$$t(x) = \sum_{j=0}^{2n} y_j s_j(x).$$

Zeige, dass die s_k trigonometrische Polynome sind. (10 Punkte)

Aufgabe 21:
a) Zeige, dass der n-te Dirichlet-Kern

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}$$

die Form

$$D_n(x) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

besitzt.
b) Bezeichne

$$S_n(f;x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{k=-n}^{n} e^{-iky}e^{ikx}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y-x)f(y)\mathrm{d}y$$

die n-te Fourierapproximation der Funktion $f \in C([0,2\pi);\mathbb{C})$. Zeige

$$\|S_n(f) - f\|_\infty \leq \left(1 + \|S_n\|_\infty\right) \inf_{t_n\in T_n} \|f - t_n\|_\infty,$$

wobei T_n den Raum der komplexwertigen trigonometrischen Polynome bis zum Grad n und

$$\|S_n\|_\infty = \sup_{f\in C([0,2\pi);\mathbb{C})} \frac{\|S_n(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty}$$

die Operatornorm von S_n bezeichnen. Zeige

$$\|S_n\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\mathrm{d}x.$$

(Es herrscht sogar Gleichheit, was hier aber nicht gezeigt werden soll.) (10 Punkte)