Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 4

Ausgabe: 12.5.2005, Abgabe der Lösungen: 24.5.2005, 10:10
Abgabe der Programmieraufgabe: 30.5.-3.6.2005, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 14:
a) Aus der folgenden Messtafel ist leider ein Wert verloren gegangen.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	1	1	2	?	5

Werte das durch die übrigen Daten definierte Lagrange-Interpolationspolynom mit Hilfe des Neville-Algorithmus an der fehlenden Stelle 3 aus, ohne das Polynom explizit aufzustellen.
b) Bestimme mit Hilfe der dividierten Differenzen das Interpolationspolynom in der Newton-Darstellung. Werte es mit dem Horner-Schema an der Stelle 3 aus.
c) Im Nachhinein stellt sich heraus, dass der fehlende Wert 3 ist. Ergänze das Schema aus b) um den neuen Punkt, ohne es komplett neu aufzustellen. Werte das durch alle Punkte gehende Interpolationspolynom an der Stelle 5 aus. (10 Punkte)

Aufgabe 15:
Zu gegebenen Werten (x_i, f_i) für $i = 0, 1, \dots, n$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ ist ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p^{(i)}(x_i) = f_i$ zu finden, wobei $p^{(i)}$ die i-te Ableitung von p bezeichnet. Diskutiere Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen dieser Interpolationsaufgabe. (10 Punkte)

Aufgabe 16:
Es seien paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gegeben. Bestimme die Fundamentalpolynome $p_i, \bar{p}_i \in \Pi_{2n+1}$ der Hermite-Interpolation, die den Bedingungen

$$p_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad p_i'(x_j) = 0, \qquad \bar{p}_i(x_j) = 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{p}_i'(x_j) = \delta_{ij}$$

genügen. Skizziere die Fundamentalpolynome für $n = 2$. (10 Punkte)

Aufgabe 17:
Im folgenden wird gezeigt, dass sich die Lagrange-Interpolationspolynome bei äquidistanten Stützstellen oft bösartig verhalten, wenn der Polynomgrad groß wird.
a) Zeige, dass das Polynom

$$p_n(x) = x(x-1)(x-2)\cdot \ldots \cdot (x-n)$$

für ungerades n symmetrisch und für gerades n antisymmetrisch bezüglich des Mittelpunkts $n/2$ ist. Zeige

$$|p_n(x)| > \frac{n+2}{n}|p_n(x+1)| \qquad \text{für } x \in (0, n/2-1) \setminus \mathbb{Z},$$
$$|p_n(x+1)| > \frac{n+2}{n}|p_n(x)| \qquad \text{für } x \in (n/2, n-1) \setminus \mathbb{Z}.$$

Die Oszillation von p_n wird zum Rand hin also immer stärker.
b) Bestimme das Polynom $q_n \in \Pi_n$ mit $q_n(0) = 1$ und $q_n(i) = 0$ für $i = 1, 2, \dots, n$. Untersuche das Verhalten von $q_n(-k)$ für festes $k \in \mathbb{N}$ und $n \to \infty$. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 2:
Gegeben seien paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und Funktionswerte $f_0, f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}$. Schreibe ein C-, C++- oder Javaprogramm, das das zugehörige Lagrange-Interpolationspolynom mit Hilfe des Neville-Schemas an einer festen Stelle $x \in \mathbb{R}$ auswertet. Verwende dazu einmal eine rekursive Vorgehensweise, wie es die Formel

$$L(x_i, x_{i+1}, \dots, x_k; x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_i)L(x_{i+1}, \dots, x_k; x) - (x - x_k)L(x_i, \dots, x_{k-1}; x)}{x_k - x_i} & \text{für } i < k, \\ f_i & \text{für } i = k \end{cases}$$

suggeriert, und einmal ein nicht-rekursives Schema, bei dem die Mehrfachberechnung von Werten vermieden wird. Teste das Programm anhand der Werte

$$x_i = \frac{i}{n}, \qquad f_i = \frac{1}{1 + x_i}.$$

Beobachte und erkläre die Laufzeitunterschiede bei beiden Methoden. (10 Punkte)