Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005

Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 3

Ausgabe: 28.4.2005, Abgabe der Lösungen: 12.5.2005, 10:10

Aufgabe 9:
Zur Berechnung der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bringt man A oft durch Ähnlichkeitstransformation mit einer Matrix $Q \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$ auf Hessenberggestalt

$$QAQ^T = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots\dots\dots & & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & h_{nn-1} & h_{nn} \end{pmatrix} =: H,$$

also auf eine Matrix H mit $h_{ij} = 0$ für $i \geq j+2$. H heißt *zerfallend*, falls es ein i mit $h_{i,i-1} = 0$ gibt.
a) Zeige, dass jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer nicht zerfallenden Hessenbergmatrix die geometrische Vielfachheit 1 besitzt, d.h. $\dim \operatorname{kern}(A - \lambda I) = 1$. Zeige, dass alle Eigenwerte einer nicht zerfallenden symmetrischen Tridiagonalmatrix auch die algebraische Vielfachheit 1 besitzen.
b) Sei nun eine zerfallende Hessenbergmatrix H gegeben. Damit besitzt H die Blockstruktur

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & B \\ 0 & H_2 \end{pmatrix},$$

wobei H_1 und H_2 kleinere Hessenbergmatrizen sind. Zeige, dass die Eigenwerte von H die von H_1 und von H_2 sind, unabhängig von B. Damit lässt sich die Eigenwertberechnung der großen Matrix H auf die Eigenwertberechnung der kleineren Matrizen H_1 und H_2 zurückführen. Läßt sich mit dieser Technik auch die Berechnung aller, keiner oder nur eines Teils der Eigenvektoren von H auf die Berechnung von Eigenvektoren kleinerer Matrizen zurückführen? (10 Punkte)

Aufgabe 10:
a) Zeige, dass ein Schritt des QR-Verfahrens angewandt auf eine Hessenbergmatrix wieder eine Hessenbergmatrix ergibt, das QR-Verfahren also die Hessenbergstruktur erhält.
b) Formuliere eine Methode, die einen Schritt des QR-Verfahrens für eine Hessenbergmatrix mit $\mathcal{O}(n^2)$ Rechenoperationen anstelle von $\mathcal{O}(n^3)$ Rechenoperationen für eine beliebige Matrix durchführt. (10 Punkte)

Aufgabe 11:
Zur Bestimmung eines Eigenwertes einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Nähe eines Schätzwertes $\mu \in \mathbb{R}$ verwendet man die inverse Vektoriteration, die in einer gängigen Variante durch

$$(A - \mu I)\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)}, \qquad y^{(k+1)} = \frac{\tilde{y}^{(k+1)}}{\|\tilde{y}^{(k+1)}\|_\infty}$$

gegeben ist. Die Konvergenz des Verfahrens ist umso besser, je näher μ an einem Eigenwert liegt. Bestimme dazu eine Korrektur δ für μ so, dass

$$r(\delta) := (A - (\mu+\delta)I)\tilde{y}^{(k+1)} = y^{(k)} - \delta\tilde{y}^{(k+1)}$$

minimal in der Euklidischen Norm ist. (10 Punkte)

Aufgabe 12:
a) Zeige, dass die LR-Zerlegung stetig ist, d.h. dass die Abbildung

$$\mathcal{A} \to \mathbb{C}^{n\times n} \times \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad A \mapsto (L_A, R_A)$$

stetig ist, wobei

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) : A \text{ besitzt eine } LR\text{-Zerlegung } A = L_A R_A\}$$

die Menge der LR-zerlegbaren Matrizen bezeichnet.
b) Zeige, dass die Menge $\mathcal{A}$ offen ist. (10 Punkte)

Aufgabe 13:
Analog zum QR-Verfahren zur Eigenwertbestimmung einer Matrix $A = A_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es auch das LR-Verfahren: Im m-ten Schritt führe eine LR-Zerlegung

$$A_m = L_m R_m$$

durch und setze

$$A_{m+1} = R_m L_m.$$

Hierbei wird angenommen, dass die LR-Zerlegung existiert.
Nimm an, dass A vermöge $A = TDT^{-1}$ mit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ diagonalisierbar ist und dass

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \ldots > |\lambda_n| > 0$$

gilt. Nimm ferner an, dass sowohl T als auch T^{-1} LR-Zerlegungen besitzen. Zeige, dass die Folge $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in diesem Fall gegen eine rechte obere Dreiecksmatrix konvergiert. (10 Punkte)