Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005

Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 2

Ausgabe: 21.4.2005, Abgabe der Lösungen: 28.4.2005, 10:10
Abgabe der Programmieraufgabe: 9.-13.5.2005, genauer Termin nach Vereinbarung.

Klausur: Dienstag 19.7.2005, 10:15-13:15, Großer Hörsaal der Mathematik

Aufgabe 5:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix. Zeige, dass es für $n \geq 5$ kein direktes Verfahren[1] zur Bestimmung einer Matrix $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gibt, so dass $B^{-1}AB$ eine rechte obere Dreiecksmatrix ist.
Hinweis: Zu gegebenen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n} & \cdots & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_0}{a_n} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und wende den Abelschen Satz an. (10 Punkte)

Aufgabe 6:
Betrachte das verallgemeinerte Eigenwertproblem $Ax - \lambda Bx = 0$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit sind. Forme das verallgemeinerte Eigenwertproblem in ein gewöhnliches Eigenwertproblem $My - \lambda y = 0$ um, dessen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ist. (10 Punkte)

Aufgabe 7:
Für die Vektoriteration in der Vorlesung und in Aufgabe 4 wurde vorausgesetzt, dass die betragsgrößten Eigenwerte der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gleiches Vorzeichen besitzen. Betrachte nun den allgemeinen Fall linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = -\lambda_{p+1} = -\lambda_{p+2} = \ldots = -\lambda_m > |\lambda_{m+1}| \geq |\lambda_{m+2}| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

wobei $1 \leq p < m \leq n$. Sei wiederum $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ mit $b_i \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Startwert, wobei der Fall $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ ausgeschlossen sei. Betrachte die Vektoriteration

$$x^{(k)} = \frac{Ax^{(k-1)}}{\|Ax^{(k-1)}\|_\infty}.$$

(Die Vorzeichenkorrektur mittels $\sigma^{(k)}$ ist für diese Aufgabe nicht erforderlich.) Zeige:
a) Die Folge $x^{(k)}$ ist im allgemeinen divergent.
Es gibt zwei gängige Varianten, dem abzuhelfen.
Variante 1: Vektoriteration mit A^2 anstelle von A, d.h.

$$\tilde{x}^{(k)} = \frac{A^2\tilde{x}^{(k-1)}}{\|A^2\tilde{x}^{(k-1)}\|_\infty}.$$

b) Zeige, dass die Folge $(\tilde{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\left(\sum_{i=1}^m b_i v_i\right) / \|\sum_{i=1}^m b_i v_i\|_\infty$ konvergiert. Der Grenzwert ist Eigenvektor von A^2, im allgemeinen jedoch kein Eigenvektor von A. Ferner gilt $\lim_{k\to\infty} \|A^2\tilde{x}^{(k)}\|_\infty = \lambda_1^2$.
Variante 2: Betrachte die gemittelten Folgen

$$y_+^{(k)} = x^{(2k)} + x^{(2k+1)} \qquad \text{und} \qquad y_-^{(k)} = x^{(2k)} - x^{(2k+1)}$$

c) Zeige, dass die Folgen $(y_+^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_-^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergieren. Bestimme ihre Grenzwerte. Sind die Grenzwerte Eigenvektoren von A? (10 Punkte)

[1] Unter einem direkten Verfahren wird ein Verfahren verstanden, das nach einer endlichen Zahl elementarer Rechenoperationen das exakte Ergebnis liefert, im Gegensatz zu iterativen Verfahren, die nur gegen das exakte Ergebnis konvergieren, es im allgemeinen nach endlich vielen Schritten jedoch nie erreichen.

Aufgabe 8:
Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Vektoriteration sei der betragsmäßig größte Eigenwert λ_1 und ein zugehöriger Eigenvektor v_1 bestimmt worden.
a) Finde einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q_v e_1 = \alpha v_1$ für die zugehörige Householder-Matrix Q_v und ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt.
b) Zeige, dass A durch

$$Q_v A Q_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b^T \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

auf Blockstruktur transformiert werden kann, wobei $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ und $A_1 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ sind.
c) Zeige, dass die Matrix A_1 die Eigenwerte $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ besitzt.
Damit kann die Vektoriteration auf die kleinere Matrix A_1 angewendet werden, um den nächsten Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor zu berechnen. Dieses als *Householder-Deflation* bekannte Verfahren kann iteriert werden, um alle Eigenwerte und alle Eigenvektoren zu bestimmen. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 1:
Die Schwingungen einer Saite werden durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$$

beschrieben, wobei $u(x,t)$ die Auslenkung der Saite an der Stelle x zum Zeitpunkt t bezeichnet. Wir interessieren uns für Lösungen der Form

$$u(x,t) = v(x)w(t).$$

Dann folgt unter geeigneten Annahmen aus der Differentialgleichung

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite unabhängig von t und die rechte Seite unabhängig von x ist, müssen sie konstant sein; bezeichne die Konstante mit λ. Die Funktion v genügt folglich der Eigenwertgleichung

$$v''(x) = \lambda v(x).$$

Die Saite sei an den Enden $x = 0$ und $x = 1$ fest eingespannt, so dass wir als Randwerte

$$v(0) = v(1) = 0$$

fordern. Die Diskretisierung[2] dieses kontinuierlichen Eigenwertproblems führt zu dem endlichdimensionalen Eigenwertproblem

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

für den Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$, wobei

$$A = (N+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}.$$

Hierbei nähert $\mathbf{v}_i$ den Funktionswert $v(\frac{i}{N+1})$ an.
Schreibe ein C-, C++- oder Javaprogramm, das mit Hilfe des QR-Verfahrens alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren bestimmt. Teste es für verschiedene Problemgrößen N. Stelle die Eigenfunktionen graphisch dar, z.B. mit MatLab.
Hinweis zur Visualisierung mit MatLab: Am einfachsten wird die Matrix mit den spaltenweisen Eigenwerten in eine Datei `eigenvec` geschrieben, wobei die Spalten durch Leerzeichen und die Zeilen durch eine neue Zeile in der Datei getrennt werden. Nach dem Start von MatLab mit `matlab -nojvm` kann der i-te Eigenvektor mit `load eigenvec; plot(eigenvec(:,i)); grid on` dargestellt werden. (10 Punkte)

[2] Diskretisierungstechniken werden später in der Vorlesung behandelt, vgl. jedoch Aufgabe 40 von Übungsblatt 10 des letzten Semesters.