Praktische Mathematik II

Sommersemester 2005
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 1

Ausgabe: 14.4.2005, Abgabe der Lösungen: 21.4.2005, 10:10

Aufgabe 1:
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + y^3 - 4 \\ x^3 - y^3 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Iterationsfunktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des Newtonverfahrens zur Bestimmung einer Nullstelle von f. Zeige, dass das Newtonverfahren für alle Startvektoren $(x_0, y_0)^T \in [1,2]^2$ konvergiert. Führe zwei Schritte zum Startvektor $(x_0, y_0)^T = (1,1)^T$ durch. (10 Punkte)

Aufgabe 2:
Berechne durch Abschätzung der Eigenwerte mit Hilfe von Gerschgorinkreisen eine obere Schranke für die Kondition $\operatorname{cond}_2(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & * & * & * & * \\ * & 4 & * & * & * \\ * & * & -5 & * & * \\ * & * & * & 0 & * \\ * & * & * & * & 13 \end{pmatrix}$$

eine symmetrische Matrix, wobei die Sterne jeweils reelle Zahlen mit $|*| \le \frac{1}{4}$ bezeichnen. Zeige, dass die Vektoriteration mit dem Startwert $e_5 = (0,0,0,0,1)^T$ gegen einen Eigenvektor zum betragsgrößten Eigenwert von A konvergiert, der Startwert e_5 also für die Vektoriteration geeignet ist. (10 Punkte)

Aufgabe 4:
Beweise die folgende Verallgemeinerung eines Satzes zur Vektoriteration aus der Vorlesung:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Eigenvektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ zu den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Für ein $m \in \{1, \ldots, n\}$ gelte

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m \qquad \text{und} \qquad |\lambda_1| > |\lambda_{m+1}| \ge |\lambda_{m+2}| \ge \ldots \ge |\lambda_n|.$$

Sei $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ mit $b_i \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Startwert, wobei der Fall $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$ ausgeschlossen sei. Definiere die Vektoriteration durch

$$x^{(k)} = \sigma^{(k)} \frac{Ax^{(k-1)}}{\|Ax^{(k-1)}\|_\infty}, \qquad \sigma^{(k)} \in \{1, -1\} \text{ so, dass } x^{(k)} \cdot x^{(k-1)} \ge 0.$$

Dann gilt

$$x^{(k)} = \bar{\sigma}^{(k)} \frac{A^k x^{(0)}}{\|A^k x^{(0)}\|_\infty}, \qquad \text{wobei} \qquad \bar{\sigma}^{(k)} = \prod_{i=1}^{k} \sigma^{(i)},$$

und die Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert linear gegen einen der beiden Eigenvektoren

$$\pm \frac{\sum_{i=1}^m b_i v_i}{\|\sum_{i=1}^m b_i v_i\|_\infty}$$

zum Eigenwert λ_1, wobei der asymptotische Fehlerkoeffizient $|\lambda_{m+1}/\lambda_1|$ beträgt. Weiterhin gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sigma^{(k)} = \operatorname{sgn} \lambda_1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} \sigma^{(k)} \|Ax^{(k)}\|_\infty = \lambda_1.$$

(10 Punkte)

Informationen zur Vorlesung

Übungsaufgaben

In der Vorlesung werden jeweils am Donnerstag Übungsaufgaben verteilt. Die Aufgaben können einzeln, zu zweit oder zu dritt schriftlich bearbeitet und abgegeben werden. Die Bearbeitungsdauer beträgt eine Woche, die Abgabe der Lösungen findet donnerstags vor der Vorlesung statt. Die Lösungen werden von den Tutoren korrigiert und in der Übungsgruppe zurückgegeben und besprochen. Jeder muss in der Lage sein, die abgegebenen Lösungen an der Tafel vorzutragen. Das gilt insbesondere auch für die Abgabe in Gruppen.

In drei- bis vierwöchigem Abstand werden Programmieraufgaben ausgegeben. Die Bearbeitung erfolgt wahlweise im CIP-Pool (Wegelerstr. 6, Zimmer 114, http://cip.iam.uni-bonn.de) oder am eigenen PC. Die Vorstellung der Lösungen erfolgt im CIP-Pool nach gesonderter Terminabsprache. Auch die Programmieraufgaben können einzeln, zu zweit oder zu dritt bearbeitet und vorgestellt werden. Erlaubte Programmiersprachen sind C, C++ und Java.

Die Übungsblätter und andere Informationen sind auf der Webseite

`http://wissrech.ins.uni-bonn.de/lehre/prama2_ss05`

zu finden.

Übungsgruppen

Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt durch Eintrag in die Listen. Diese hängen ab Dienstag, den 12.4.05 im Verbindungsgang zwischen den Gebäuden Wegelerstr. 6 und 10 aus. Die Übungen beginnen ab Montag, den 18.4.05, d.h. in der zweiten Semesterwoche.

Die Übungen finden zweistündig pro Woche unter Anleitung eines Tutors statt. Dort werden die Übungsaufgaben besprochen und Vorlesungsinhalte und Fragen diskutiert. Jeder Teilnehmer muss im Semester mindestens eine Lösung einer Übungsaufgabe an der Tafel vorstellen.

Klausur

Zugelassen zur Klausur ist, wer

- regelmäßig und aktiv an der Übungsgruppe teilgenommen und
- mindestens 50% der möglichen Punkte der Theorieaufgaben erreicht und
- mindestens 50% der möglichen Punkte der Programmieraufgaben erreicht hat.

Wer die Klausur nicht besteht, darf an der Nachklausur teilnehmen. Einen Leistungsnachweis (Übungsschein) erhält, wer die Klausur oder die Nachklausur besteht. Die Termine der Klausur und der Nachklausur werden noch bekanntgegeben.