universitätbonn

Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner — Dr. Marcel Arndt

Übung 9

Abgabe bis Donnerstag, 12.1., 10.15 Uhr
Abgabe der Programmieraufgabe: 9.–13.1. im CIP–Pool

Aufgabe 46: [Gerschgorin–Kreise]

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, daß jeder Eigenwert λ von A in einem der Gerschgorin–Kreise von A liegt, d.h.

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} K_i \cap \bigcup_{i=1}^{n} K_i^T,$$

wobei

$$K_i = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} |a_{ij}| \Big\} \quad \text{und} \quad K_i^T = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1,\dots,n \\ j\neq i}} |a_{ji}| \Big\}.$$

(b) Folgern Sie daraus, daß strikt diagonaldominante Matrizen (siehe Aufgabe 44) positiv definit sind.

(c) Für eine nichtsymmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei die spektrale Kondition definiert als $\kappa_2(A) = \sqrt{\lambda_{max}(A^TA)/\lambda_{min}(A^TA)}$. Berechnen Sie durch Abschätzung der Eigenwerte mit Hilfe von Gerschgorin–Kreisen eine obere Schranke für die Kondition $\kappa_2(A)$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 47: [Optimaler Relaxationsparameter des SOR–Verfahrens]

Die reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei zerlegt in $A = D+L+R$, wobei L und R linke untere bzw. rechte obere Dreiecksmatrizen mit verschwindender Diagonale sind. Die Diagonalmatrix D sei ebenfalls regulär. Ferner sei A konsistent geordnet, d.h. die Eigenwerte von $J_\alpha = D^{-1}(\alpha L + \alpha^{-1}R)$ seien unabhängig von $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ferner habe $J = J_1$ nur reelle Eigenwerte, die betragsmäßig kleiner als 1 seien. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der optimale Relaxationsparameter für das SOR-Verfahren ermitteln. Gesucht ist also

$$\omega_{\text{opt}} = \operatorname*{argmin}_{\omega\in\mathbb{R}} \rho(M_\omega),$$

wobei

$$M_\omega = I - \omega(D+\omega L)^{-1}A = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega R]$$

die Iterationsmatrix des SOR-Verfahrens bezeichnet. Gemäß Vorlesung kann das SOR-Verfahren nur konvergieren, wenn $\omega \in (0,2)$ ist. Es genügt also, sich im folgenden auf dieses Intervall zu beschränken.

(a) Zeigen Sie

$$(I+\omega D^{-1}L)(\lambda I - M_\omega) = (\lambda+\omega-1)I + \lambda\omega D^{-1}L + \omega D^{-1}R.$$

(b) Zu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei μ definiert durch

$$\mu\omega\sqrt{\lambda} = \lambda + \omega - 1. \qquad (*)$$

Hier und im folgenden bezeichnet $\sqrt{\lambda}$ die komplexe Quadratwurzel von λ, deren Argument in $[0,\pi)$ liegt. Zeigen Sie

$$\det(\lambda I - M_\omega) = \left(\sqrt{\lambda}\omega\right)^n \det\left(\mu I - J_{-\sqrt{\lambda}}\right).$$

(c) Zeigen Sie, daß $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ genau dann ein Eigenwert von M_ω ist, wenn μ gemäß $(*)$ ein Eigenwert von J ist.

(d) Zeigen Sie, daß die Lösungen $\sqrt{\lambda_1(\mu)}$ und $\sqrt{\lambda_2(\mu)}$ der in $\sqrt{\lambda}$ quadratischen Gleichung $(*)$ durch

$$\sqrt{\lambda_1(\mu)} = \frac{1}{2}\left(\omega\mu + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega-1)}\right) \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\lambda_2(\mu)} = \frac{1}{2}\left(\omega\mu - \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega-1)}\right)$$

gegeben sind.

(e) Zeigen Sie für $\mu \geq 0$:

$$|\lambda_1(\mu)| = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\omega\mu + \sqrt{\omega^2\mu^2-4(\omega-1)}\right)^2 & \text{falls } \mu^2 \geq \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}, \\ \omega - 1 & \text{falls } \mu^2 < \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}, \end{cases}$$

$$|\lambda_2(\mu)| = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\omega\mu - \sqrt{\omega^2\mu^2-4(\omega-1)}\right)^2 & \text{falls } \mu^2 \geq \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}, \\ \omega - 1 & \text{falls } \mu^2 < \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}. \end{cases}$$

(f) Zeigen Sie für $\tilde{\mu} \geq \mu \geq 0$:

$$|\lambda_1(\mu)| \geq |\lambda_2(\mu)| \qquad \text{und} \qquad |\lambda_1(\tilde{\mu})| \geq |\lambda_1(\mu)|.$$

(g) Zeigen Sie: Ist μ ein Eigenwert von J, so ist auch $-\mu$ ein Eigenwert von J. Hinweis: Betrachten Sie J_1 und J_{-1}.

(h) Zeigen Sie: Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von M_ω, so gilt $\omega = 1$.

(i) Zeigen Sie

$$\rho(M_\omega) = |\lambda_1(\rho(J))|.$$

Beachten Sie, daß der mögliche Eigenwert $\lambda = 0$ von M_ω gesondert behandelt werden muß.

(j) Zeigen Sie

$$\rho(M_\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\omega\rho(J) + \sqrt{\omega^2\rho(J)^2 - 4(\omega-1)}\right)^2 & \text{für } 0 < \omega \leq \omega_{\text{opt}}, \\ \omega - 1 & \text{für } \omega_{\text{opt}} \leq \omega < 2, \end{cases}$$

wobei der optimale Relaxationsparameter ω_{opt} durch

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}.$$

gegeben ist.

(k) Zeigen Sie, daß die Konvergenzraten (genau: der Spektralradius der jeweiligen Iterationsmatrix) des Jacobi-Verfahrens, des Gauß-Seidel-Verfahrens sowie des SOR-Verfahrens mit optimalem Relaxationsparameter ω_{opt} gegeben sind durch

$$\rho_{\text{J}} = \rho(J),$$

$$\rho_{\text{GS}} = \rho(J)^2,$$

$$\rho_{\text{SOR}} = \rho(M_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1 = \left(\frac{\rho(J)}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} \right)^2$$

Beurteilen Sie die Verfahren im Hinblick auf ihre Konvergenzgeschwindigkeit.

Punkte: $\boxed{24}$

Aufgabe 48: [Programmieraufgabe]

Durch die Diskretisierung der zweiten Ableitung in einer Raumdimension entstehen typischerweise $n \times n$-Matrizen der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie ein C-, C++- oder Javaprogramm, das das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des SOR-Verfahrens löst. Hierbei ist es aus Effizienzgründen sinnvoll, die Matrix A nicht abzuspeichern, sondern ihre Koeffizienten direkt in die Iterationsformel einzusetzen. Es sollen soviele Iterationen ausgeführt werden, bis die 2-Norm des Residuums $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ um den Faktor 10000 verringert worden ist, d.h. bis

$$\frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r^{(0)}\|_2} \leq \frac{1}{10000}$$

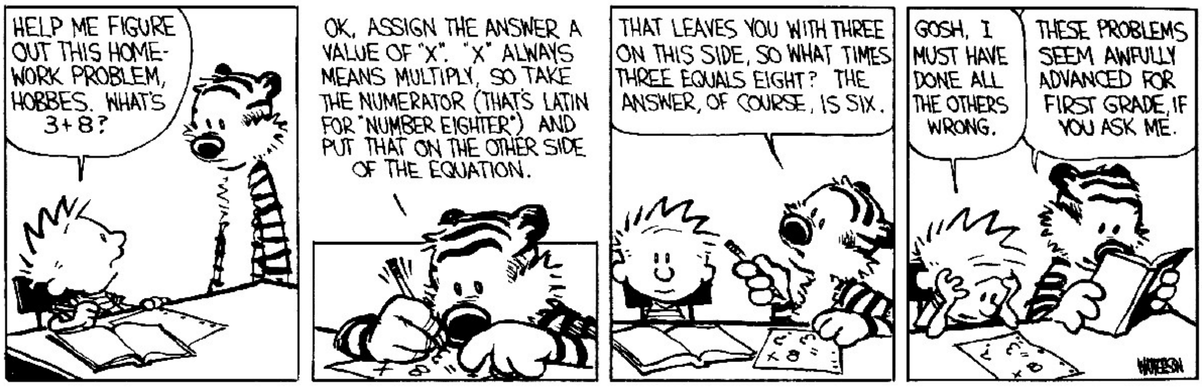
gilt.

(b) Testen Sie das Programm anhand der rechten Seite $b = (1, 1, \ldots, 1)^T$ und des Startwerts $x^{(0)} = 0$ für die Matrixgrößen $n = 16, 64, 256$ und Relaxationsparameter $\omega = 1.00, 1.01, \ldots, 1.99, 2.00$. Stellen Sie die mittlere Reduktionsrate der Norm des Residuums graphisch dar: Auf der Ordinate die Werte ω und auf der Abszisse die Werte $\sqrt[k]{1/10000}$, wobei k die Zahl der benötigten Iterationen bezeichnet. Bestimmen Sie auf diese Weise experimentell bis auf zwei Nachkommastellen genau den optimalen Relaxationsparameter ω_{opt}.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 32+10 Punkte

Aufgabe 49: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*



Tja, so manchem Prama-Studierdenden ist es bei der Lösung der Übungsaufgaben schon ähnlich ergangen. Wer kann dem kleinen Calvin wirklich helfen? Die phantasievollsten Antworten werden prämiert.

Die Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 8 darf ich leider noch nicht verraten, da der Advents-kalender–Wettbewerb noch bis Ende Dezember läuft. Ich kann aber sagen, daß etwa die Hälfte der abgegebenen Antworten richtig ist. Ich bin mal gespannt, wie die Prama–Studierenden im Vergleich zu den Zehntklässlern abgeschnitten haben. :-)

Frohe Weihnachten!