Praktische Mathematik I — WS 2005/06
Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner

Übung 8

Abgabe bis Donnerstag, 22.12., 10.15 Uhr

Aufgabe 42: [Konvergenz von Iterationsverfahren]

(a) Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und sei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ein Startwert. Die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sei durch die Iterationsvorschrift $x^{(k+1)} = Tx^{(k)}$ definiert. Zeigen Sie, daß $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann für jeden beliebigen Startwert konvergiert, wenn für jeden Eigenwert λ von T gilt:

$$|\lambda| < 1 \text{ oder } \lambda = 1, \text{ und } 1 \text{ ist kein verallgemeinerter Eigenwert von } T$$

(b) Wir betrachten nun die lineare Iteration $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + Nb$ zur Lösung von $Ax = b$. Der Iterationsfehler sei $e^{(k)} = x^{(k)} - x$. Zeigen Sie, daß für den Iterationsfehler die folgende Rekursion gilt:

$$e^{(k+1)} = Me^{(k)} = M^k e^{(0)}$$

(c) Sei A regulär und $\rho(M) < 1$. Zeigen Sie, daß das Iterationsverfahren dann gegen die eindeutige Lösung von $Ax = b$ konvergiert.

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 43: [Konvergenz der Richardson–Iteration]

Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitze nur positive Eigenwerte. Der kleinste und der größte Eigenwert von A seien mit $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, daß das Richardson-Verfahren

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \vartheta(Ax^{(m)} - b)$$

zum Gleichungssystem $Ax = b$ für reelle Parameter ϑ genau dann konvergiert, wenn

$$0 < \vartheta < \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

(b) Zeigen Sie weiterhin, daß die optimale Konvergenzrate für

$$\vartheta_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \qquad \text{mit} \qquad \rho(M_{\vartheta_{\mathrm{opt}}}) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

erreicht wird, wobei M_ϑ die Iterationsmatrix zum Parameter ϑ bezeichnet.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 44: [Konvergenz des Jacobi- und Gauß-Seidel–Verfahrens]

Gegeben seien $A = L + D + R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$, wobei A strikt diagonaldominant ist, d. h.

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

(a) Zeigen Sie, daß das Jacobi-Verfahren (Gesamtschrittverfahren) genau dann konvergiert, wenn für die zugehörige Iterationsmatrix $G_J = I - D^{-1}A = -D^{-1}(L + R)$ gilt:

$$\|G_J\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j\neq i} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1.$$

(b) Zeigen Sie, daß dann auch das Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren) mit der Iterationsmatrix $G_{GS} = I - (L + D)^{-1}A = -(L + D)^{-1}R$ konvergent ist, wobei sogar gilt:

$$\|G_{GS}\|_\infty \leq \|G_J\|_\infty < 1$$

(c) Die Matrix A genüge nun dem folgenden schwachen Zeilensummenkriterium:

$$0 < \sum_{k\neq 1} \frac{|a_{1k}|}{|a_{11}|} < 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k\neq j} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} \leq 1$$

für $j = 2, \ldots, n$. Ferner gebe es zu jedem $j = 2, \ldots, n$ ein k mit $k < j$ und $a_{jk} \neq 0$. Zeigen Sie, daß das Gauß-Seidel-Verfahren auch in diesem Fall konvergiert und daß die Kontraktion q der Abschätzung

$$q = \max_j q_j < 1$$

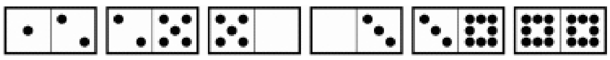
genügt, wobei die q_j rekursiv definiert sind durch

$$q_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} q_k + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}$$

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 45: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

Diesmal eine Knobelaufgabe vom Mathematischen Adventskalender (www.mathekalender.de): Immer noch so lange bis Weihnachten! Sebastian vertreibt sich die Zeit, indem er Dominoschlangen legt. Dabei werden die Dominosteine so hintereinander in eine Reihe gelegt, daß benachbarte Steine mit derselben Zahl aneinanderstoßen:



Beim ersten Versuch bleiben einige Steine übrig. Er fragt sich, ob er diese Steine nicht auch noch hätte anlegen können, wenn er geschickter angefangen hätte. Er spielt mit einem 9er-Dominospiel, das für alle möglichen Paare der Zahlen 0 bis 9 genau einen Stein enthält. Wie viele Steine bleiben beim Bau solch einer Dominoschlange mit 9er-Dominosteinen mindestens übrig?

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 7: Am Neujahrstag des Jahres 1801 entdeckte der italienische Astronom Giuseppe Piazzi den ersten Asteroiden Ceres. Er konnte die Bahn 40 Tage lang verfolgen, dann verschwand Ceres hinter der Sonne. Mit Hilfe der gerade neu erfundenen linearen Ausgleichsrechnung (Aufgabe 39) konnte der damals 24-jährige Carl Friedrich Gauß zusammen mit dem deutschen Astronomen Franz Xaver von Zach im Dezember des Jahres Ceres wiederfinden. Gauß kam dadurch zu Weltruhm.

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte