Praktische Mathematik I — WS 2005/06
Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner — Dr. Marcel Arndt

Übung 7

Abgabe bis Donnerstag, 15.12., 10.15 Uhr
Abgabe der Programmieraufgabe: 19.–23.12. im CIP–Pool

Aufgabe 36: [Kondition von Matrizen]

(a) Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei invertierbar und $\|\cdot\|$ sei eine beliebige Vektornorm bzw. die dazugehörige Matrixnorm. Zeigen Sie, daß dann für die Kondition $\kappa(A)$ gilt:

$$\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \frac{\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}$$

(b) Sei nun $|\lambda_{\text{max}}| = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$ und $|\lambda_{\text{min}}| = \min\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$. Zeigen Sie, daß für eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ folgende Konditionsabschätzung gilt:

$$\kappa(A) \geq \frac{|\lambda_{\text{max}}|}{|\lambda_{\text{min}}|}$$

(c) Zeigen Sie, daß im Fall der Euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ für symmetrische Matrizen A sogar Gleichheit gilt:

$$\kappa_2(A) = \frac{|\lambda_{\text{max}}|}{|\lambda_{\text{min}}|}$$

Finden Sie eine nichtsymmetrische Matrix A, für die Ungleichheit vorliegt.

(d) Ermitteln Sie die Konditionszahlen κ_2 und κ_∞ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Punkte: $\boxed{9}$

Aufgabe 37: [Block–Systeme]

Zu lösen ist nun das spezielle lineare Gleichungssystem $Cx = b$ mit $C = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, wobei die Teilblöcke $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ und A, B, C jeweils invertierbar sein sollen.

(a) Sei C^{-1} partitioniert wie C, also $C^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrizen E, F, G, H.

(b) Die Vektoren $x = (x_1, x_2)^T$ und $b = (b_1, b_2)^T$ seien entsprechend der Matrix C partitioniert. Weiterhin sei $(A + B)y_1 = b_1 + b_2$ und $(A - B)y_2 = b_1 - b_2$. Wie kann man nun x_1 und x_2 ermitteln, wenn y_1 und y_2 bekannt sind? Worin liegt der Vorteil bei der Berechnung des Vektors x, wenn zuerst y_1 und y_2 ermittelt werden?

Punkte: $\boxed{5}$

Aufgabe 38: [Vandermonde–Matrizen]

Eine Vandermonde–Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat die Einträge $A_{ij} = (t_i)^{j-1}$ wobei die $t_i, 1 \le i \le n$ paarweise verschieden sind (vergleiche Aufgabe 40 (b)).

(a) Zeigen Sie, daß eine Vandermonde–Matrix vollen Rang hat, d.h. $\operatorname{rang}(A) = \min\{m, n\}$.

(b) Warum sind Vandermonde–Matrizen in der Regel schlecht konditioniert?

Punkte: $\boxed{5}$

Aufgabe 39: [Lineare Ausgleichsrechnung]

Wir betrachten das folgende lineare Ausgleichsproblem: Zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ finde $x \in \mathbb{R}^n$, so daß $\|Ax - b\|_2$ minimal ist. Seien nun konkret

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Stellen Sie die zugehörige Normalengleichung auf und bestimmen Sie die Lösung $x \in \mathbb{R}^2$, das Residuum $r = Ax - b$ und den mittleren quadratischen Fehler $e = (\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i^2)^{1/2}$.

Punkte: $\boxed{5}$

Aufgabe 40: [Programmieraufgabe]

(a) Schreiben Sie ein C-, C++- oder Javaprogramm, das zu einer gegebenen (nicht notwendigerweise quadratischen) Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rang}(A) = n$ die Zerlegung $A = QR$ mittels Householder-Reflexionen berechnet. Die Matrix Q muß nicht abgespeichert werden, jedoch soll für die Anwendung in Teilaufgabe (b) zu einem gegebenen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ zusätzlich der Vektor $Q^T b$ bestimmt werden.

(b) Gegeben seien nun Meßwerte $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ zu paarweise verschiedenen Zeitpunkten $t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$. Zu bestimmen sind die Koeffizienten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ des Polynoms $p(t) = \sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}$, das die Meßwerte im Sinne der kleinsten Quadrate möglichst gut approximiert, d.h. $\sum_{i=1}^m (p(t_i) - b_i)^2 \to \min$. Formulieren Sie das Problem in Matrixschreibweise und lösen Sie es mit Hilfe des Programms aus Teilaufgabe (a). Reduzieren Sie dazu (wie in der Vorlesung) die Normalengleichung auf $\bar{R}x = \bar{c}$, wobei $\bar{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ den oberen Teil von R und $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ den oberen Teil von $Q^T b$ bezeichnen. Testen Sie das Programm anhand der beiden Datensätze

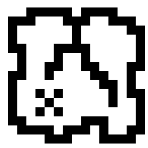
$$t_i = \frac{i-1}{m-1} \qquad \text{und} \qquad b_i = \sin(\pi t_i) \quad \text{bzw.} \quad b_i = \max(0, 2t_i - 1) \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

(c) Stellen Sie die Meßwerte $\{(t_i, b_i), i = 1, \ldots, m\}$ und das Lösungspolynom p graphisch dar. Hierzu kann beispielsweise das Programmsystem MatLab genutzt werden, das im CIP-Pool installiert ist. Hinweise dazu finden sich auf der Web–Seite der Vorlesung.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 41: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

Passend zum Jahresbeginn entdeckt ein italienischer Astronom einen neuen Asteroiden. Ein paar Tage später verschwindet der Asteroid jedoch hinter der Sonne. Viele Wissenschaftler versuchen in der Folge vergeblich, den Asteroiden wieder zu finden. Erst mit einem ganz neu entwickelten Verfahren gelingt es am Jahresende. Welches Jahr schreiben wir?



Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 6: Der Schatz liegt im Feld mit der Koordinate (5,11) (bzw. in Zeile 11, Spalte 5), gekennzeichnet durch ein großes X.

Gesamtpunktzahl: 24+10 Punkte