Praktische Mathematik I — WS 2005/06
Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner

Übung 6

Abgabe bis Donnerstag, 8.12., 10.15 Uhr

Aufgabe 30: [Matrixnormen und Regularität]

Sei $||\cdot||$ eine (beliebige) Matrixnorm sowie $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. A sei regulär und es gelte $||A^{-1}|| \leq \alpha$ sowie $||A^{-1}|| \cdot ||B - A|| \leq \beta < 1$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß dann B ebenfalls regulär ist und $||B^{-1}|| \leq \frac{\alpha}{1-\beta}$ gilt.

Punkte: $\boxed{3}$

Aufgabe 31: [Rang–1–Modifikation]

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär und $x, b \in \mathbb{R}^n$ sowie $A = L \cdot R$ und $Ax = b$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$z = x - A^{-1}u \cdot \frac{v^T x}{1 + v^T A^{-1} u}$$

die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $(A + uv^T)z = b$ ist, falls die skalare Größe $1 + v^T A^{-1} u \neq 0$ ist ($v, u \in \mathbb{R}^n$).

(b) Formulieren Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung von z, wobei die Zerlegung von A in $L \cdot R$ zu benutzen ist. Dabei seien L, R, x, u und v bekannt.

(c) Sei nun A zusätzlich symmetrisch. Sei dabei $R = D \cdot L^T$, wobei D eine Diagonalmatrix mit positiven Elementen ist. Zeigen Sie, daß dann $A + uu^T$ symmetrisch positiv definit ist und $1 + u^T A^{-1} u > 1$ für $u \neq 0$ gilt.

(d) Zeigen Sie, daß sich die Inverse von $A + uv^T$ unter der Voraussetzung aus Teilaufgabe (a) ergibt zu

$$\left(A + uv^T\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1} u}$$

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 32: [Quadratische Form mit einer Rang–1–Matrix]

Sei der Rang der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ identisch 1, also $rg(A) = 1$. Zu berechnen ist die quadratische Form $s(x) = x^T A x$, wobei $x \in \mathbb{R}^n$ sei.

(a) Wie kann A als Produkt zweier Vektoren dargestellt werden?

(b) Sei nun A symmetrisch. Zeigen Sie in diesem Fall mit Hilfe von Teilaufgabe (a), daß A positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist.

(c) Geben Sie einen effizienten Algorithmus zur Berechnung von $s(x)$ an.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 33: [Existenz und Eindeutigkeit der LR–Zerlegung]

(a) Zeigen Sie, daß die LR–Zerlegung einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eindeutig ist, soweit sie existiert. Gilt dies auch, falls A singulär ist?

(b) Finden Sie eine reguläre 2×2 Matrix, die keine LR–Zerlegung besitzt.

(c) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch und positiv definit. Der erste Schritt der LR–Zerlegung von A führt zur Darstellung

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline l_{21} & \\ \vdots & I \\ l_{n1} & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} r_{11} & r_{12} \cdots r_{1n} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n-1),(n-1)}$. Zeigen Sie, daß B wieder symmetrisch und positiv definit ist. Folgern Sie daraus, daß A eine LR–Zerlegung (ohne Pivotisierung) besitzt.

Punkte: $\boxed{7}$

Aufgabe 34: [Cholesky–Zerlegung]

(a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch, positiv definit. Zeigen Sie, dass die Eigenwerte von A reell und positiv sind und dass $a_{ij}^2 < a_{ii}a_{jj}$ für alle $i \neq j$ gilt.

(b) Zeigen Sie, daß die Cholesky–Zerlegung von A eindeutig ist.

(c) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

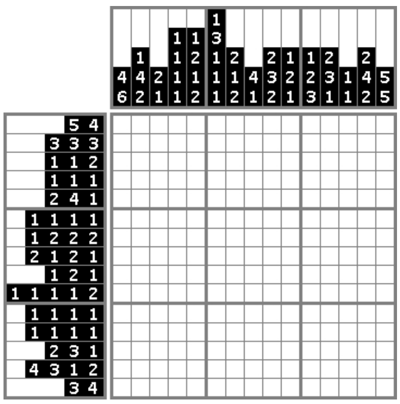
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (-10, 11, 49, 63)^T$.

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 35: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

In der nebenstehenden mathematischen Schatzkarte ist ein Schatz versteckt. Alle Felder der 15×15 *Matrix sind entweder schwarz oder weiß. Die Zahlen an den Rändern geben die Reihenfolge und die Länge der schwarzen Blöcke in der jeweiligen Zeile und Spalte an, deren genaue Position ist leider nicht bekannt. Zwei schwarze Blöcke sind aber immer durch mindestens ein weißes Feld getrennt. Der Ursprung des Koordinatensystems sei links oben, das erste Feld der Matrix habe die Koordinate* $(1,1)$. *An welcher Koordinate liegt der Schatz vergraben?*



Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 5: Das bis heute ungelöste Problem ist die Goldbachsche Vermutung (jede gerade Zahl größer als Zwei ist die Summe zweier Primzahlen), benannt nach dem deutschen Mathematiker Christian Goldbach, der von $1690 = 10 \cdot 13^2$ *bis* $1764 = 42^2$ *gelebt hat. Laut Douglas Adams' „Per Anhalter durch die Galaxis“ ist* 42 *die ultimative Antwort auf die Frage nach dem Leben, dem Universum und dem ganzen Rest. Die möglicherweise dazugehörige Frage „Was ergibt 9 mal 6?“ ist paradoxerweise in der Basis* 13 *sogar richtig.*

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte