universitätbonn

Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner — Dr. Marcel Arndt

Übung 5

Abgabe bis Donnerstag, 1.12., 10.15 Uhr
Abgabe der Programmieraufgabe: 5.–9.12. im CIP–Pool

Aufgabe 22: [p–Vektornormen]

Die p–Norm eines reellen Vektors $v = (v_i)_{i=1,\dots,n}$ ist für $p \in I\!N$ definiert als $\|v\|_p = (\sum |v_i|^p)^{1/p}$ und für $p = \infty$ als $\|v\|_\infty = \max |v_i|$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\lim\limits_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$

(b) $\|v\|_1 \geq \|v\|_p \geq \|v\|_\infty$

(c) $\|v\|_p \geq \|v\|_q$ für $p < q$

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 23: [p–Matrixnormen]

Die entsprechende p–Norm einer reellen, quadratischen Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ ist definiert durch $\|A\|_p = \max\limits_{x\neq 0} \|Ax\|_p / \|x\|_p$. Zeigen Sie die Eigenschaften:

(a) $\|A\|_p = \max\limits_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$

(b) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$

(c) $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty}$

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 24: [Frobenius–Norm]

Die Frobenius–Norm einer reellen, quadratischen Matrix ist definiert als $\|A\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n \sum\limits_{j=1}^n (a_{ij})^2}$. Zeigen Sie die Eigenschaften:

(a) $\|A\|_F^2 = \mathrm{spur}(A^T A) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i(A^T A)$

(b) $\|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$

(c) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 25: [LR–Zerlegung]

Berechnen Sie die LR–Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 \\ 8 & -26 & -12 \\ 0 & 6 & -38 \end{pmatrix}.$$

Punkte: $\boxed{3}$

Aufgabe 26: [QR–Zerlegung]

Berechnen Sie die QR–Zerlegung der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 \\ 4 & 10 & 4 \\ 4 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Punkte: $\boxed{3}$

Aufgabe 27: [Programmieraufgabe]

(a) Schreiben Sie ein C-, C++- oder Java-Programm, das die LR–Zerlegung (ohne Pivotisierung) einer gegebenen $N \times N$ Matrix A berechnet und die Matrizen L und R ausgibt. Der Wert N darf als fest angenommen werden. In jedem Schritt soll geprüft werden, ob das Diagonalelement, durch das dividiert wird, von Null verschieden ist und ggf. mit einer Fehlermeldung abgebrochen werden. Testen Sie das Programm anhand der beiden Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & 1 & 7 & -1 \\ 9 & 6 & 3 & 16 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & -10 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Erweitern Sie das obige Programm um Funktionen zur Vorwärtssubstitution $Ly = b$ und Rückwärtssubstitution $Rx = y$. Lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $A_1 x = b$, wobei $b = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 & 17 & 3 \end{pmatrix}^T$, und geben Sie den Lösungsvektor x aus.

Punkte: $\boxed{10}$

Aufgabe 28: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

Ich bin ein berühmter deutscher Mathematiker. Mein Geburtsjahr ist zehnmal so groß wie das Quadrat der richtigen Basis der Frage, mein Todesjahr ist das Quadrat der Antwort. Trotz alledem bin ich der Urheber eines bis heute ungelösten Problems. Welches?

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 4: Der kleine Asteroid hat den Namen 3587 Descartes, benannt nach dem den französischen Philosoph und Mathematiker René Descartes, dem Erfinder des kartesischen Koordinatensystems (in dem sich der kleine Asteroid auch bewegt).

Gesamtpunktzahl: 24+10 Punkte