universitätbonn

Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner

Übung 4

Abgabe bis Donnerstag, 24.11., 10.15 Uhr

Aufgabe 17: [Rückwärtsanalyse eines Gleichungssystems]

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & 1 \\ cx & + & dy & = & 0 \end{array}$$

(a) Wie lautet die explizite Lösung des Gleichungssystems (vorrausgesetzt sei $ad \neq bc$)?

(b) Seinen nun a, b, c, d Maschinenzahlen. Gleitpunktrechnung mit Maschinengenauigkeit ε ergebe $\bar{x}$ und $\bar{y}$. Zeigen Sie, daß $\bar{x}$, $\bar{y}$ die exakte Lösung des modifizierten Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccc} \bar{a}\bar{x} & + & \bar{b}\bar{y} & = & 1 \\ \bar{c}\bar{x} & + & \bar{d}\bar{y} & = & 0 \end{array}$$

ist, wobei (in 1. Ordnung von ε) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} |\bar{a}-a| \leq 3|a|\varepsilon & , & |\bar{b}-b| \leq 3|b|\varepsilon \\ |\bar{c}-c| \leq |c|\varepsilon & , & |\bar{d}-d| \leq |d|\varepsilon \end{array}$$

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 18: [Kondition eines Eigenwertproblems]

Ein gut konditioniertes Problem ist die Bestimmung der Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

(a) Zeigen Sie, daß die Berechnung der Koeffizienten $q(a,b,c) = -(a^2+b^2+c^2)$ und $r(a,b,c) = -2abc$ des charakteristischen Polynoms $P(x) = x^3 + qx + r$ ein gut konditioniertes Problem (bezüglich der relativen Konditionszahlen) ist.

(b) Zeigen Sie, daß hingegen die Berechnung der Nullstellen $\lambda_1(q,r)$, $\lambda_2(q,r)$und $\lambda_3(q,r)$ von $P(x)$ extrem schlecht konditioniert sein kann. Betrachten Sie hierzu die (implizite) Ableitung von $P(\lambda_i(q,r)) = 0$ für $1 \leq i \leq 3$.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 19: [Normen]

Berechnen Sie die folgenden Vektor- und Matrixnormen:

$$\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|_1, \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|_2, \left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\|_\infty, \left\|\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\|_1, \left\|\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\|_2, \left\|\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\right\|_\infty$$

Punkte: $\boxed{7}$

Aufgabe 20: [Matrixmultiplikation]

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrizen. Bestimmen Sie, wie viele elementare Additionen und Multiplikationen reeller Zahlen zur Berechnung des Produkts $C := AB$ mit der gewöhnlichen Summenformel notwendig sind. Drücken Sie die benötigte Zeit für die Matrixmultiplikation mit Hilfe der Landausymbole aus.

(b) Sei nun n eine Zweierpotenz, also $n = 2^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Strassen[1] schlug folgendes Verfahren vor: Zerlege A und B in jeweils vier $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Berechne die sieben Hilfsprodukte

$$\begin{aligned} P_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) & P_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\ P_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} & P_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\ P_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) & P_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}). \\ P_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 + P_4 - P_5 + P_7 & P_3 + P_5 \\ P_2 + P_4 & P_1 + P_3 - P_2 + P_6 \end{pmatrix}.$$

Damit reduziert sich die Zahl der Multiplikationen kleinerer Matrizen von acht auf sieben gegenüber dem naiven Verfahren, während die Zahl der Additionen gestiegen ist. Dieses Verfahren wird nun rekursiv zur Berechnung der sieben kleineren Produkte angewandt. Zeigen Sie, daß die benötige Zeit $T(n)$ für die Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen der Rekurrenzrelation

$$T(n) = 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{9}{2}n^2, \qquad T(1) = 1$$

genügt. Folgern Sie daraus, daß die Matrixmultiplikation nach Strassen die Komplexität $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) \approx \mathcal{O}(n^{2.807})$ besitzt.

(c) Der derzeit beste bekannte Algorithmus zur Matrixmultiplikation stammt von D. Coppersmith und S. Winograd[2] und besitzt die Komplexität $\mathcal{O}(n^{2.376})$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}(n^2)$ eine untere Schranke für die Komplexität der Matrixmultiplikation ist.

Punkte: $\boxed{13}$

Aufgabe 21: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

Ich bin ein kleiner Asteroid in einem System, das mein philosophischer Namensgeber erfunden hat (und nicht die Karthager, wie man vielleicht glauben mag). Hier sind die Normen von Vektoren (und Matrizen) leicht ablesbar. Welche Nummer habe ich?

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 3: Die Halbtonleiter in der Musik besteht aus 12 Tönen (C, Cis, D, Dis, ...), wobei der musikalisch brauchbare Bereich etwa 8 Oktaven umfaßt. Eine reine Stimmung (etwa anhand der Obertöne) ist unpraktisch, wenn die Tonart sich ändert. Bei der gleichtemperierten Stimmung, die von Vincenzo Galilei, dem Vater von Galileo, entdeckt wurde, haben zwei aufeinanderfolgende Töne immer genau das gleiche Frequenzverhältnis $\sqrt[12]{2}$, *wodurch alle Intervalle zwar leicht falsch, aber in jeder Tonart ähnlich falsch sind. Damals hatte Vincenzo nicht die mathematischen Hilfsmittel, die gleichtemperierte Stimmung zu realisieren, aber heute ist sie bei fast allen Musikinstrumenten im Einsatz.*

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte

[1] V. Strassen, *Gaussian elimination is not optimal,* Numerische Mathematik, 13:354–356 (1969).

[2] D. Coppersmith, S. Winograd, *Matrix Multiplication via Arithmetic Progressions,* Journal of Symbolic Computation, 9:251–280 (1990).