universitätbonn

INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK · RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS UNIVERSITÄT BONN

Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner

Übung 3

Abgabe bis Donnerstag, 17.11., 10.15 Uhr

Aufgabe 11: [Vermeidung von Auslöschung]

Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke so um, daß für die angegebenen Argumente Auslöschung vermieden wird:

- $\sqrt[3]{1+x} \; - 1$ für $x \approx 0$
- $\sin x - \sin y$ für $x \approx y$
- $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ für $x \approx 0$
- $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$ für $x \gg 1$

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 12: [Gesetze der Rückwärtsanalyse]

Bei der Rückwärtsanalyse wird das Resultat einer Rechnung als exaktes Ergebnis für gestörte Operanden interpretiert, also $a \dot{*} b = (a * b)(1+\xi)$ für $* \in \{+,-,\cdot,/\}$. Welche der folgenden Gesetze gelten, wenn man ξ für alle Operanden als konstant annimmt:

- Kommutativgesetze: $a+b = b+a$ bzw. $a \cdot b = b \cdot a$
- Assoziativgesetze: $(a+b)+c = a+(b+c)$ bzw. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Distributivgesetze: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ bzw. $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Punkte: $\boxed{3}$

Aufgabe 13: [Sautter–Trick]

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Seien alle $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon < 1$ für $1 \leq i \leq n$ sowie δ definiert durch

$$1+\delta = \prod_{i=1}^{n} (1+\varepsilon_i)^{\pm 1}$$

Dann gilt:

$$|\delta| \leq \frac{n \cdot \varepsilon}{1 + n \cdot \varepsilon}$$

Die "± 1“ in dem Produkt bedeutet, daß der Exponent bei $(1+\varepsilon_i)$ für $1 \leq i \leq n$ entweder $+1$ oder -1 lautet, aber nicht für alle $1 \leq i \leq n$ identisch zu sein braucht!

Punkte: $\boxed{3}$

Aufgabe 14: [Polynomauswertung]

Wir wollen nun eine Fehleranalyse bei der Auswertung von Polynomen $y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ durchführen. Bei der Rückwärtsanalyse ist das gestörte Resultat der Auswertung $\tilde{y}$ das Ergebnis einer exakten Rechnung für gestörte Koeffizienten $\tilde{c}_i$, also $\tilde{y} = \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 x + \ldots + \tilde{c}_n x^n$. Im folgenden sei der Fehler für alle Operationen konstant gleich ξ.

(a) Geben Sie die Koeffizienten $\tilde{c}_i$ an, für den Fall, daß das Polynom beginnend mit der niedrigsten Potenz ausgewertet wird. Linearisieren sie dabei rechtzeitig, also zum Beispiel ist $(1+\xi)(1+\xi) \approx (1+2\xi)$.

(b) Beginnen Sie nun mit der höchsten Potenz. Welche ist die bessere Strategie?

(c) Hohe Potenzen von x lassen sich (wenn man nur die arithmetischen Grundoperationen zur Verfügung hat) schneller rekursiv berechnen. Sei z.B. $x_2 = x \cdot x$ und $x_4 = x_2 \cdot x_2$, dann benötigt man zur Berechnung von $x^{11} = ((x_4 \cdot x_4) \cdot x_2) \cdot x$ nur fünf Multiplikationen statt zehn. Wie ändern sich nun qualitativ die Resultate der Aufgaben (a) und (b)?

(d) Berechnen Sie nun die Koeffizienten $\tilde{c}_i$ wenn das Polynom mit dem Horner–Schema ausgewertet wird. Linearisieren Sie dabei zum einen einfach (wie oben) oder genauer mit dem Sautter–Trick (Aufgabe 13).

(e) Sei nun $\xi = 10^{-8}$. Schätzen Sie den relativen Fehler im höchsten Koeffizienten c_n und im Gesamtergebnis y für die obigen Verfahren ab.

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 15: [Kondition]

Berechnen Sie die Konditionszahlen der folgenden Funktionen und überprüfen Sie, wo die Auswertungen der Funktionen qualitativ gut bzw. schlecht konditioniert sind.

- $f(x) = \arcsin(x), \quad x \in [-1, 1]$
- $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geq 0$
- $f(x, y) = x^y = e^{y \ln x}, \quad x > 0$

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 16: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

Ich bin ein merkwürdiger Computer, schon Galilei soll mich gekannt haben. Meine Mantisse umfasst 12 Zahlen, mein Exponentenbereich ist theoretisch unendlich (wobei so mancher Physiker hier anderer Meinung ist), in der Praxis aber nicht größer als Acht. Aufeinander folgende Zahlen haben bei mir nicht den gleichen Abstand, sondern das gleiche Verhältnis. Welches?

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 2: Die beiden gesuchten Zahlen sind $\sqrt{2}$ und $1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Der Schauspieler John Travolta (bekannt u.a. aus dem Film Saturday Night Fever) besitzt in seinem Garten eine Boeing 707 mit der Registrierung N707JT, die er ab und zu selbst fliegt.

Gesamtpunktzahl: 32 Punkte