

Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner — Dr. Marcel Arndt

Übung 2

Abgabe bis Donnerstag, 10.11., 10.15 Uhr

Abgabe der Programmieraufgabe: 21.–25.11. im CIP-Pool

Aufgabe 6: [Fehlerfortpflanzung]

Wir wollen nun die Fortpflanzung von Fehlern bei der Durchführung der vier arithmetischen Grundoperationen (+, −, ·, /) betrachten. Die Zahlen x und y seien mit Fehlern Δx und Δy behaftet, wobei $|\frac{\Delta x}{x}|, |\frac{\Delta y}{y}| \ll 1$ gelte. Zeigen Sie, daß selbst bei exakter Rechnung (also ohne weitere Rundungsfehler) für die relativen Fehler der Ergebnisse die folgenden Aussagen gelten:

$$(a) \frac{(x + \Delta x) + (y + \Delta y) - (x + y)}{x + y} = \frac{x}{x + y} \cdot \frac{\Delta x}{x} + \frac{y}{x + y} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

$$(b) \frac{(x + \Delta x) - (y + \Delta y) - (x - y)}{x - y} = \frac{x}{x - y} \cdot \frac{\Delta x}{x} - \frac{y}{x - y} \cdot \frac{\Delta y}{y}$$

$$(c) \frac{(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) - (x \cdot y)}{x \cdot y} \approx \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$$

$$(d) \frac{(x + \Delta x)/(y + \Delta y) - (x/y)}{x/y} \approx \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}$$

(e) Falls der relative Fehler des Ergebnisses sehr viel größer ist, als der relative Fehler der Eingabedaten, so spricht man von Auslöschung. In welchen der obigen Fälle kann Auslöschung auftreten?

Punkte: 7

Aufgabe 7: [Rundung]

(a) Zeigen Sie, daß die folgenden Ausdrücke mathematisch äquivalent sind:

- $((a + b)(a - b))^2$
- $(a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2$
- $(a^2 - b^2)^2$

(b) Seien nun $a = 10^6 + 1$ und $b = 10^6 - 2$. Berechnen Sie obige Ausdrücke mit 10 Dezimalstellen. Runden Sie dabei nach *jedem* Rechenschritt das Teilergebnis.

(c) Berechnen Sie jeweils den relativen Fehler der Resultate (2 gültige Ziffern genügen). Was ist der Grund für dieses Verhalten?

Punkte: 7

Aufgabe 8: [Rekursion]

Gegeben sei die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $y_i = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x x^i dx$.

(a) Zeigen Sie die Abschätzungen

$$\frac{1}{e(i+1)} < y_i < \frac{1}{i+1} \quad \text{und} \quad y_{i+1} < y_i.$$

(b) Bestimmen Sie je eine Vorwärts- und eine Rückwärtsrekursionsformel, mit der der Wert y_i aus y_{i-1} bzw. y_{i+1} bestimmt werden kann.

Mit der Vorwärtsrekursionsformel lassen sich somit sukzessiv die Folgenglieder y_1, y_2, y_3, \dots berechnen, falls der Startwert y_0 bekannt ist. Entsprechend lassen sich mit der Rückwärtsrekursionsformel die Folgenglieder $y_{k-1}, y_{k-2}, \dots, y_0$ berechnen, falls ein Startwert y_k mit $k \in \mathbb{N}$ bekannt ist.

(c) Anstelle der exakten Startwerte y_0 bzw. y_k seien genäherte Startwerte \tilde{y}_0 bzw. \tilde{y}_k gegeben. Wie lauten die absoluten Fehler $\Delta y_i = y_i - \tilde{y}_i$ bei Vorwärts- und Rückwärtsrekursion in Abhängigkeit von Δy_0 bzw. Δy_k ?

Punkte: 10

Aufgabe 9: [Programmieraufgabe]

Schreiben Sie ein C-, C++- oder Java-Programm, das die Werte y_0, y_1, \dots, y_k aus Aufgabe 8 für $k = 30$ mittels Vorwärts- und Rückwärtsrekursion berechnet. Verwenden Sie als Startwert für die Vorwärtsrekursion den exakten Wert

$$y_0 = \frac{e-1}{e}$$

und als Startwert für die Rückwärtsiteration die Werte

$$y_k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e(k+1)} + \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{und} \quad y_k = 10^6,$$

also das arithmetische Mittel der Abschätzungen oben und einen vollkommen schlechten Wert. Stellen Sie die Ergebnisse tabellarisch dar und beurteilen Sie sie im Hinblick auf Aufgabe 8(c).

Punkte: 10

Aufgabe 10: [Bonusaufgabe zum Knobeln]

Es ist Samstag nacht und John ist fieberhaft in seinem Garten auf der Suche nach seinem Flugzeug. Erst gestern hat ihm ein Mathematiker (vermutlich ein Numeriker) erklärt, daß man den Flugzeugtyp an einer von zwei ganz besonderen Zahlen ablesen kann. Wenn man zu beiden Zahlen Eins addiert, so ist ihre Summe gleich ihrem Produkt. Wenn man jeweils Eins abzieht, ist ihre Differenz gleich ihrem Quotient. Wie lautet die Registrierung des Flugzeugs?

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 1: Die Zahl 11250859 entspricht Hexadezimal ABACAB. „Abacab“ ist auch der Titel eines Albums der britischen Popgruppe Genesis mit Sänger Phil Collins aus dem Jahr 1981.

Gesamtpunktzahl: 24 + 10 Punkte