universitätbonn

Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner

Übung 11

Abgabe bis Donnerstag, 26.1., 10.15 Uhr

Aufgabe 54: [Konjugierte Gradienten]

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrisch positiv definiten Matrix A soll durch Minimierung der quadratischen Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ mit dem CG–Verfahren gelöst werden. Hierbei seien x^k die Näherungslösungen, d^k die (konjugierten) Suchrichtungen und g^k die Residuen (wobei $g^{k-1} \neq 0$ gelte) in Iteration k. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften des CG–Verfahrens:

(a) $(d^i)^T g^k = 0$ für $i < k$

(b) $d^k \neq 0$

(c) $\text{span}\{g^0, Ag^0, ..., A^{k-1}g^0\} = \text{span}\{g^0, g^1, ..., g^{k-1}\} = \text{span}\{d^0, d^1, ..., d^{k-1}\}(=: V_k)$

(d) $(g^j)^T g^i = 0$ für $0 \leq j < i$ (d.h. die g^i stehen senkrecht aufeinander)

(e) $f(x^k) = \min\limits_{z \in V_k} f(x^0 + z)$.

Punkte: $\boxed{8}$

Aufgabe 55: [Numerische Differentiation]

Die erste Ableitung $\frac{\partial}{\partial x}$ kann wie folgt diskretisiert werden:

$$\begin{aligned}
(D^+u)(x) &= \frac{1}{h}[u(x+h) - u(x)] && \text{Vorwärtdifferenz} \\
(D^-u)(x) &= \frac{1}{h}[u(x) - u(x-h)] && \text{Rückwärtsdifferenz} \\
(D^0u)(x) &= \frac{1}{2h}[u(x+h) - u(x-h)] && \text{Symmetrische Differenz.}
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie: D^+D^- ist eine Diskretisierung für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

(b) Zeigen Sie: $D^-D^+ = D^+D^-$.

(c) Sind D^+D^0, D^-D^0, D^0D^+ und D^0D^- Diskretisierungen für die zweite Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$?

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 56: [Finite Differenzen]

Der Laplace–Operator ist definiert als

$$-\Delta = -\sum_{i=1}^{d} \partial_{ii} = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

wobei d die betrachtete Dimension ist. Die Diskretisierung des Operators in im Falle $d = 1$ sei

$$-\Delta \doteq -\frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$$

wobei das Diskretisierungsgitter des Intervalls $[a, b]$ durch die $n+1$ Gitterpunkte $x_j = a + j \cdot \frac{b-a}{n}$ mit $0 \leq j \leq n$ definiert ist und u_j den Funktionswert am Gitterpunkt x_j darstellt.

(a) Beweisen Sie, daß die angegebene Diskretisierung die Konsistenzordnung 2 besitzt. Entwickeln Sie dazu u_{j+1} und u_{j-1} mittels einer Taylorreihe, die Differenzierbarkeit von u sei bis zum gewünschten Grad stets vorausgesetzt.

(b) Obige Diskretisierung lautet in "Sternnotation" $-h^{-2}[\ 1 \quad -2 \quad 1\ ]$. Wie lautet die Diskretisierung von $-\Delta$ für $n = 2$ in Sternnotation? Zeigen Sie auch im 2D-Fall die Konsistenzordnung 2.

(c) Zeigen Sie, daß es für den Operator $-\Delta$ nicht möglich ist, eine Diskretisierung der Konsistenzordnung 3 zu konstruieren, welche die Sternnotation $[\ \alpha \quad \beta \quad \gamma\ ]$ besitzt.

Punkte: $\boxed{6}$

Aufgabe 57: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*

Das nebenstehende „magische Quadrat" besitzt in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonale die gleiche Summe 34. Sogar in jedem der vier Quadranten, in den vier mittleren Feldern, in den vier Ecken, sowie in 70 weiteren Kombinationen ergibt sich ebenfalls diese Summe. In der Mitte der untersten Zeile findet sich die Jahreszahl 1514. In welchen Feldern hat der Erfinder sich versteckt?

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Die Lösung dieser letzten Knobelaufgabe findet sich ab nächsten Donnerstag auf den Prama–Internetseiten. Der Gewinner/die Gewinnerin des Knobelwettbewerbs wird auf dem Prama–Fest am 8. Februar verkündet.

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 10: Die Adjazenzmatrix A eines Graphen mit n Knoten ist eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen $a_{ij} = 1$, falls die Knoten i und j durch eine Kante verbunden sind und $a_{ij} = 0$ sonst. Die k-ten Potenzen einer Adjazenzmatrix A^k beschreiben, wieviele Möglichkeiten es gibt, in k Schritten von Knoten i zu Knoten j zu kommen. Die Adjazenzmatrix des Eisenbahngraphen von Lummerland und ihre achte Potenz sehen wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A^8 = \begin{pmatrix} 70 & 36 & 57 & 57 & 36 \\ 36 & 70 & 36 & 57 & 57 \\ 57 & 36 & 70 & 36 & 57 \\ 57 & 57 & 36 & 70 & 36 \\ 36 & 57 & 57 & 36 & 70 \end{pmatrix}$$

Es gibt also genau 70 Möglichkeiten, von einem Ort (z.B. vom Haus der Frau Waas) ausgehend 8 Fahrten zu absolvieren, und am Ende wieder am Ausgangspunkt zu sein.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte