Praktische Mathematik I — WS 2005/06

Prof. Dr. Michael Griebel — Dr. Thomas Gerstner — Dr. Marcel Arndt

Übung 10

Abgabe bis Donnerstag, 19.1., 10.15 Uhr
Abgabe der Programmieraufgabe: 23.–27.1. im CIP–Pool

Aufgabe 50: [Gradientenverfahren]

Betrachten Sie das Gradientenverfahren zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a > 1$ eine Konstante ist.

(a) Der Startvektor sei $x_0 = (a, 1)^T$. Bestimmen Sie die erste Suchrichtung d_0, den ersten Skalar α_0 sowie die erste Iterierte x_1.

(b) Sei $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ die i-te Iterierte. Zeigen Sie: $x_{i+1}^1 = \rho x_i^1$ und $x_{i+1}^2 = -\rho x_i^2$. Wie lautet ρ?

(c) Bestimmen Sie die Kondition $\kappa_2(A)$ der Matrix A. Zeigen Sie, daß die Abschätzung

$$\|x_i - A^{-1}b\|_A \leq \left(\frac{\kappa_2(A) - 1}{\kappa_2(A) + 1} \right)^i \|x_0 - A^{-1}b\|_A$$

der Konvergenzgeschwindigkeit scharf ist: Für die Iterierten dieser Aufgabe gilt Gleichheit.

(d) Zeigen Sie: $d_{i+1}^T d_i = 0$ und $d_{i+2} = \beta_i d_i$. Wie lautet β_i?

(e) Der Winkel φ zweier Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ gemessen in der Energienorm ist definiert durch $\cos\varphi = (x^T Ay)/(||x||_A ||y||_A)$ mit $||x||_A = \sqrt{x^T Ax}$. Zeigen Sie, daß in der Energienorm d^k und d^{k+1} fast parallel sind, d.h. d^k und d^{k+1} schließen einen kleinen Winkel φ ein.

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 51: [Tschebyscheff–Polynome]

Die Tschebyscheff-Polynome wurden in der Vorlesung eingeführt mittels

$$T_k(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^k + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^k \right] = \cos(k \cdot \arccos(x))$$

(a) Berechnen Sie $T_0(x)$ und $T_1(x)$ und beweisen Sie die folgende Rekursionsformel:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \text{ für } k = 1, 2, \ldots$$

(b) Sei $\hat{\mathbf{P}}_k := x^n + \mathbf{P}_{k-1}$ die Menge der monomischen Polynome vom Grad k (höchster Koeffizient auf 1 normiert). Zeigen Sie: $c_k T_k \in \hat{\mathbf{P}}_k$ mit $c_0 = 1$ und $c_k = 2^{1-k}$ für $k \geq 1$.

(c) Beweisen Sie die Identität (i sei die imaginäre Einheit):

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^k\right] &= \frac{1}{2}\left[\left(x+i\sqrt{1-x^2}\right)^k+\left(x-i\sqrt{1-x^2}\right)^k\right]\\ &= \cos(k\cdot\arccos(x))\end{aligned}$$

(d) Sei $\lfloor a\rfloor$ für $a\in\mathbb{R}$ ist die größte ganze Zahl $\tilde{a}$ mit $\tilde{a}\le a$. Zeigen Sie:

$$T_k(x)=\sum_{j=0}^{\lfloor k/2\rfloor}(-1)^j\left(\begin{array}{c}k\\2j\end{array}\right)x^{k-2j}(1-x^2)^j$$

(e) Sei $x=\dfrac{r^2+1}{r^2-1}$ mit $r>1$. Zeigen Sie: $T_k(x)=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{r+1}{r-1}\right)^k+\left(\dfrac{r-1}{r+1}\right)^k\right]$

Punkte: $\boxed{12}$

Aufgabe 52: [Programmieraufgabe]

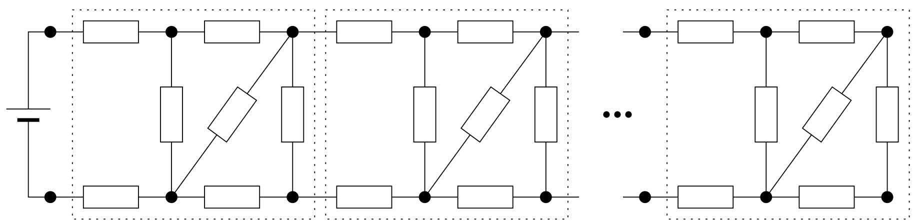
Wir betrachten ein elektrisches Netzwerk aus Widerständen. Das Netzwerk wird als Graph mit k Knoten beschrieben. Je zwei Knoten i und j sind durch einen Widerstand R_{ij} verbunden, wobei $R_{ij}=\infty$ für eine fehlende Verbindung zugelassen ist.
Sei U_i die am Knoten i anliegende Spannung. Gemäß dem Ohmschen Gesetz berechnet sich der durch den Widerstand $R_{ij}>0$ fließende Strom zu $(U_j-U_i)/R_{ij}$. Gemäß dem ersten Kirchhoffschen Gesetz ist die Summe aller zu- und abfließenden Ströme in jedem Knoten gleich Null. Wird der am Knoten i durch externe Quellen in das Netzwerk hinein- oder herausfließende Strom mit I_i^{ext} bezeichnet, so gilt also $\sum_{j\neq i}(U_i-U_j)/R_{ij}-I_i^{\text{ext}}=0$. Daraus ergibt sich die sog. Admittanzmatrixgleichung

$$\sum_{j=1}^{k}a_{ij}U_j=I_i^{\text{ext}},\qquad\text{wobei}\qquad a_{ij}=\begin{cases}-\frac{1}{R_{ij}} & \text{falls } j\neq i,\\ \sum_{l\neq i}\frac{1}{R_{il}} & \text{falls } j=i.\end{cases}$$

Für sinnvolle Netzwerke beträgt der Rang der Matrix $k-1$. OBdA kann $U_k=0$ gesetzt werden, da das Spannungspotential im Netzwerk nur bis auf eine additive Konstante festgelegt ist. Durch Elimination von U_k erhält man ein symmetrisch positiv definites lineares Gleichungssystem.

(a) Schreiben Sie ein C-, C++- oder Javaprogramm, das ein solches lineares Gleichungssystem mit Hilfe des CG-Verfahrens löst. Wer möchte, kann aus Effizienzgründen nutzen, daß die Matrix meist nur dünn besetzt ist.

(b) Testen Sie das Programm anhand des folgenden Netzwerks aus n Blöcken (gestrichelt gekennzeichnet) und $k=4n+2$ Knoten für $n=1,2,4$ und 8:

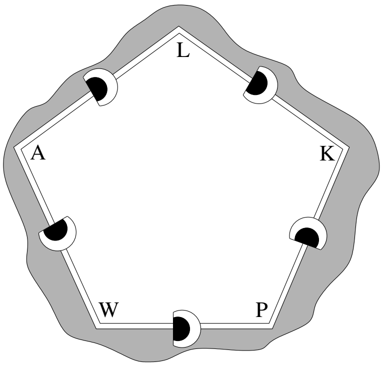


Hierbei hat jeder eingezeichnete Widerstand den Wert $R_{ij}=1$. Zur Elimination soll der linke untere Knoten gewählt werden. An den beiden linken Knoten wird ein externer Strom der Stärke 1 bzw. -1 hinein- bzw. herausgeführt (in der Abbildung durch die Batterie gekennzeichnet), an allen anderen Knoten sei der externe Strom gleich Null. Beobachten Sie in jedem CG-Schritt die Größe des Residuums und interpretieren Sie das Verhalten.

Punkte: $\boxed{10}$

Gesamtpunktzahl: 24+10 Punkte

Aufgabe 53: *[Bonusaufgabe zum Knobeln]*



Die Eisenbahnlinie auf der Insel Lummerland hat fünf Haltestellen (bei Frau Waas, Herrn Ärmel, Lukas, dem Lokomotivführer, König Alfons dem Viertel–vor–Zwölften und dem Postanleger). Zwischen je zwei Haltestellen ist bekanntlich ein Tunnel. Eines Tages hat Jim Knopf eine Idee: „Weißt Du, Lukas, wir schenken Frau Waas zum Geburtstag eine Freikarte für acht Fahrten durch jeweils einen Tunnel mit Emma, der Lokomotive. Dann kann Sie der Reihe nach Herrn Ärmel, uns, König Alfons und den Postboten besuchen und auf dem Rückweg kommt sie wieder bei König Alfons, uns und Herrn Ärmel vorbei. Das ist besonders gut, denn so bekommen wir zweimal Kuchen. Wenn sie will, kann Sie aber auch zuerst den Postboten und dann den König und auf dem Rückweg wieder den Postboten besuchen, zu Hause mittag essen und nachmittags Herrn Ärmel, uns und wieder Herrn Ärmel besuchen“. „Das ist eine sehr gute Idee“, antwortet Lukas, „aber Du weißt daß Frau Waas abends am Ende der Fahrt wieder zuhause sein muß“. „Trotzdem hat Frau Waas ganz, ganz viele Möglichkeiten, das ist doch toll“, meint Jim. Wieviele Möglichkeiten, ihre Freikarte über acht Fahrten einzulösen, hat Frau Waas nun genau?

Lösung der Knobelaufgabe von Blatt 8: Man denke sich folgenden Graphen: die Knoten des Graphen sind die Zahlen von 0 bis 9; jeder Knoten ist mit jedem anderen Knoten durch eine Kante verbunden (auch mit sich selbst). Jede Kante entspricht dann einem Dominostein. Gesucht ist nun eine Tour (Eulerzug) durch den Graphen, der jede Kante genau einmal abläuft. Das geht jedoch nur, wenn der Grad (also die Zahl der ausgehenden Kanten) aller Knoten bis auf zwei, dem Anfangs- und dem Endpunkt der Tour, gerade ist. Im Dominographen haben jedoch alle Knoten einen ungeraden Grad, wodurch $10 - 2 = 8$ *ausgehende Kanten nicht besucht werden können. Nachdem je zwei dieser ausgehenden Kanten einen Dominostein bilden, bleiben immer mindestens* $8/2 = 4$ *Dominosteine übrig.*

Zur Knobelaufgabe von Blatt 9: Gesucht waren möglichst phantasievolle Lösungen des Calvin'schen Problems „Was ergibt $3 + 8$*?“. Hier sind die schönsten Antworten:*

Von Sven Glaser:

> *Schon die alten Römer wußten zu rechnen, so addiert man* $3+8$ *wie folgt:* III *ist* 3 *und* VIII *ist* 8*. Das Ergebnis ist genau die Anzahl der Striche, die man hinzufügen muß, damit in einer uns bekannten Sprache (Englisch), die Zahl ausgeschrieben dasteht.*
>
> *Fügt man nun die richtige Anzahl Striche zu* I I I V I I I *hinzu, so erhält man*
>
> I≡ I_ I≡ V I≡ I\I = E L E V E N
>
> *Dabei fügt man* 3 *mal* 3 *Striche und* 2 *mal einen hinzu, also genau* 11!

Von Markus Burkow:

> *Wir nehmen an, es wären* 8 *rote Äpfel und* 3 *grüne Äpfel. Und nun gehen wir hin und legen sie beliebig angeordnet in eine Reihe, stellen* 5 *Kerzen in einem regelmäßigen Fünfeck drumherum, begießen den Boden mit Ziegenblut und wälzen uns in Honig.*
>
> *Danach warten wir bis der Sonnenstand genau in einer Reihe mit den Äpfeln steht, und hoffen daß wir den Asteroiden Ceres sehen können, damit wir am Abend, wenn wir uns mit John treffen und anhand der Schatzkarte, Abacab hörend, sein Flugzeug im Garten suchend, was zu erzählen haben.*
>
> *Achja, die Lösung der Aufgabe ist näherungsweise* 5.5*, denn* 50% *der Punkte reichen.*

Von *Blanka Horváth:*

> *Weißt Du Calvin, Du mußt Dir die Zahlen nur genau anschauen. Wenn Du Dir die Zahlen hinmalst, ist die* 3 *genau die Hälfte der* 8*. Nachdem* 8 *symmetrisch ist, ist* ε *ebenfalls die Hälfte von* 8*. Insgesamt sieht* $\varepsilon{\cdot}3$ *genauso aus wie* 8*, also ist* $\varepsilon \cdot 3 = 8$*.*
>
> *Also haben wir eine ganz einfache Gleichung* $3 + 8 = 3 + \varepsilon \cdot 3$*, was wiederum gleich* $\varepsilon + \varepsilon \cdot 3$ *ist, weil* ε *ja die Hälfte von* 8 *ist, genau wie die* 3*. Also kannst Du überall* ε *statt* 3 *schreiben.*
>
> *Das ergibt* $3 + 8 = \varepsilon + \varepsilon \cdot \varepsilon = \varepsilon + \varepsilon^2$*. Nun, weißt Du, daß* ε *eine sehr kleine Zahl ist. Die kleinste positive Zahl auf Deinem Taschenrechner ist* 1*, also ist die Antwort* $1 + 1^2$*. Damit ist die erste Zahl* 1 *und die zweite Zahl ebenfalls* 1*. Das ergibt* 11!

Von Sebastian Ciborowski:

> *Komm Calvin, Ich sage Dir die korrekte Lösung. Du hast* $3{+}8$*, was genauso aussieht wie* $3 + \varepsilon \cdot 3$*, wobei* ε *Deine Maschinengenauigkeit ist. Das ist genau symmetrisch zu* $\varepsilon \cdot 3 + \varepsilon$*, also ist* $3 + \varepsilon \cdot 3 = \varepsilon \cdot 3 + \varepsilon$*.*
>
> *Nun hängt der Wert von* ε *von Deinem Computer ab, aber er ist immer nahezu Null. Also hast Du* $\varepsilon \cdot 3 + \varepsilon$*, wobei* ε *nahezu Null ist und Null ist nichts, also ist dreimal nichts ebenfalls nichts.*
>
> *Alles was übrig bleibt ist das Pluszeichen, das genau zwei Linien enthält. Du weißt, daß Deine Antwort eine kleine Zahl ist, und die Zahl besteht aus genau zwei Linien. Die kleinste Zahl, die aus nur zwei Linien besteht, ist* 11!

Von Markus Pelger:

> *Ach, das ist einfach. Plus wird immer mit Integralen in Verbindung gebracht, weil die Integration als Summierung gesehen kann. Außerdem sieht die Zahl* 8 *aus wie das Symbol für Unendlich um 90 Grad gedreht und die Zahl* 3 *kann man als* E *sehen, wenn sie an der vertikalen Achse gespiegelt wird. Nachdem wir die* 3 *gespiegelt haben, müssen wir sie als* E^{-x} *schreiben, wobei das* $^{-x}$ *die Spiegelung an der vertikalen Achse symbolisiert.*
>
> *Nachdem wir je einmal gespiegelt und rotiert haben, und damit zwei geometrische Operationen ausgeführt haben, müssen wir* E^{-x^2} *für die weitere Rechnung verwenden. Insgesamt müssen wir das Integral von* E^{-x^2} *mit unendlichen Grenzen berechnen. E ist natürlich die Euler–Zahl und daher ist das Gauß–Integral die Lösung Deines Problems.*
>
> *Das Gauß–Integral kann nun über das Residuen–Theorem berechnet werden. Die Lösung ist somit die Wurzel von* π! *(Durch das Wurzelziehen wird der obere Balken von* π *weggezogen, wodurch* 11 *übrigbleibt, Anm. d. Übers.).*

Von Wassilij Gnedin:

> *Um das Ergebnis von* $3 + 8$ *zu erhalten, multiplizieren wir zuerst mit den multiplikativen Inversen von* 3 *und* 8*, also* $3 + 8 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(3 + 8) \cdot 3 \cdot 8 = (\frac{1}{8} + \frac{1}{3}) \cdot (3 \cdot 8)$*. Um eine Anschauung von* $\frac{1}{8} = 8^{-1}$ *zu erhalten, drehen wir den Ausdruck um* 90 *Grad.* -1 *um* 90 *Grad gedreht bleibt* -1*,* 8 *wird zu* ∞*, daraus folgt:* $\infty^{-1} = \frac{1}{\infty} = 0$*.*
>
> *Um die Rechnung wieder konform zu machen, müssen wir das Ergebnis um* 90 *Grad zurückdrehen und erhalten wiederum* 0*. Diskret interpretiert ist also der Term* $\frac{1}{8}$ *vernachlässigbar und wir haben:* $3 + 8 = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 8) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2^3$
>
> *Nach dem Kommutativitätsgesetz und dem Gnedin'schen Permutationsssatz der algebraischen Mengenlogik über Operationen gilt:* $3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 3^2 = 18$*, wobei zu dem Resultat noch* $3 \cdot 2^3 - |3 - 2 \cdot 3| = 18 - 3 = 15$ *addiert werden muß: also* $18 + 15 = 33$*. Da* $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$*, ergibt sich logisch stringent:* $3 + 8 = \frac{1}{3} \cdot (3 \cdot 8) = \frac{1}{3} \cdot 33 = 11$*.*