Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 14

Ausgabe: 20.1.2005, Abgabe der Lösungen: 27.1.2005, 10:10

Aufgabe 51:
Sei p ein reelles Polynom vom Grad ≥ 1 mit führendem Koeffizienten 1, und sei $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p. Für jede Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ von p gelte $\operatorname{Re}\lambda \leq \lambda_1$, wobei $\operatorname{Re}\lambda$ den Realteil von λ bezeichnet.
a) Zeige, dass p im Intervall $[\lambda_1, \infty)$ streng monoton wachsend und konvex ist.
b) Zeige, dass das Newtonverfahren für jeden Startwert $x_0 \geq \lambda_1$ eine monoton fallende Folge liefert, die gegen λ_1 konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 52:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar und besitze eine einfache Nullstelle x^*. Zeige, dass die durch

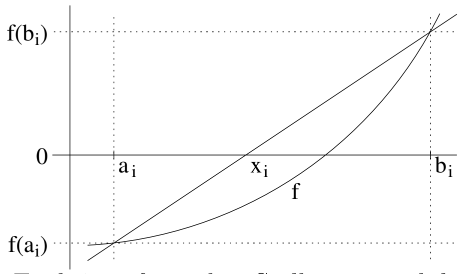
$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \qquad x_{i+1} = x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{f(x_{i+\frac{1}{2}})}{f'(x_i)}$$

definierte Iterationsfolge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle Startwerte x_0 in einer Umgebung von x^* mindestens von dritter Ordnung gegen x^* konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 53:
Sei $f \in C^0([a_0, b_0])$ mit $a_0 < b_0$, $f(a_0) < 0$ und $f(b_0) > 0$. Mit Hilfe der *Regula Falsi* werde iterativ eine Nullstelle von f bestimmt:

$$x_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)},$$

$$[a_{i+1}, b_{i+1}] = \begin{cases} [a_i, x_i] & \text{falls } f(x_i) \geq 0, \\ [x_i, b_i] & \text{falls } f(x_i) < 0. \end{cases}$$



Der Wert x_i ist also die Nullstelle der linearen Funktion, die die Funktion f an den Stellen a_i und b_i interpoliert, vgl. die Zeichnung.
a) Zeige, dass die Grenzwerte

$$a := \lim_{i\to\infty} a_i, \qquad b := \lim_{i\to\infty} b_i, \qquad \text{und} \qquad x := \lim_{i\to\infty} x_i$$

existieren. Zeige $f(x) = 0$. Zeige, dass $x = a$ oder $x = b$ ist, mindestens eine der beiden Folgen $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ also gegen eine Nullstelle von f konvergiert.
b) Konstruiere eine Funktion f, für die $f(b) > 0$ ist, $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ also nicht gegen eine Nullstelle konvergiert. (Das Trivialbeispiel einer linearen Funktion ist wegen $f(a_i) < 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ automatisch ausgeschlossen!)
c) Nun sei zusätzlich angenommen, dass $x^* \in (a_0, b_0)$ die einzige Nullstelle von f sei, außerdem sei f in x^* differenzierbar mit $f'(x^*) > 0$. Zeige, dass das Verfahren linear im Sinn von

$$\exists C < 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}: \quad |x_i - x^*| \leq \begin{cases} C|b_i - x^*| & \text{falls } f(x_i) \geq 0, \\ C|a_i - x^*| & \text{falls } f(x_i) < 0 \end{cases}$$

konvergiert.
d) Zeige, dass das Verfahren im Fall $f'(x^*) = 0$ nicht notwendigerweise linear konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 54:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, und sei $X_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ein Startwert. Zur iterativen Bestimmung der Inversen A^{-1} sei die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$X_{n+1} = X_n + X_n(I - AX_n)$$

definiert.
a) Zeige, dass für das Residuum $R_n = I - AX_n$ gilt:

$$R_{n+1} = R_n R_n$$

b) Zeige, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen A^{-1} konvergiert, falls

$$\|I - AX_0\| < 1$$

ist, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrixnorm bezeichnet.
c) Zeige, dass das Verfahren lokal quadratisch konvergiert. (10 Punkte)