Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 13

Ausgabe: 13.1.2005, Abgabe der Lösungen: 20.1.2005, 10:10
Abgabe der Programmieraufgabe: 24.-28.1.2005, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 47:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, und sei $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Konstruiere ein Fixpunktverfahren, das lokal von dritter Ordnung gegen x^* konvergiert.
Hinweis: Nutze für die Verfahrensfunktion den Ansatz

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - g(x)f(x)^2$$

mit einer geeignet zu wählenden Funktion g. (10 Punkte)

Aufgabe 48:
a) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar. Es gelte $f(0) \leq 0$ und $f'(0) > 0$. Zeige, dass f genau eine Nullstelle x^* besitzt und das Newtonverfahren zu jedem Startwert $x_0 \geq 0$ gegen x^* konvergiert.
b) Konstruiere ein quadratisch konvergentes Iterationsverfahren zur Bestimmung der Wurzel $\sqrt[p]{q}$ für $p > 1$, $q > 0$. (10 Punkte)

Aufgabe 49:
a) Zeige, dass es genau eine positive Lösung $\tilde{x}$ der Gleichung

$$\arctan x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

gibt.
b) Zeige, dass das Newtonverfahren zu der Funktion

$$f(x) = \arctan x$$

mit dem Startwert x_0 genau dann konvergiert, wenn

$$|x_0| < \tilde{x}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 50:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe in $x^* \in \mathbb{R}$ eine m-fache Nullstelle, d.h. es gebe eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x) \qquad \text{und} \qquad g(x^*) \neq 0.$$

Ferner sei vorausgesetzt, dass f und g genügend glatt sind. Zeige, dass die erste Ableitung der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

des Newtonverfahrens stetig nach x^* fortsetzbar ist mit

$$\Phi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m}.$$

Gemäß Lemma 2 in Kapitel 5 der Vorlesung ist das Verfahren für $m \geq 2$ nur lokal linear, aber nicht lokal quadratisch konvergent. Zeige, dass man jedoch ein lokal quadratisch konvergentes Verfahren erhält, falls man $\Phi(x)$ durch

$$\Phi_m(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

ersetzt. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 4:

Schreibe ein C-, C++- oder Javaprogramm für das Newtonverfahren in einer Raumdimension. Zur Konvergenzbeschleunigung bei Nullstellen höherer Ordnung soll wie in Aufgabe 50 der zusätzliche, vom Benutzer wählbare Faktor m in die Verfahrensfunktion eingefügt werden:

$$\Phi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Formuliere und implementiere geeignete Stoppkriterien. Teste das Programm mit den folgenden Beispielen und beurteile jeweils anhand der numerischen Ergebnisse die Konvergenzgeschwindigkeit.

a)	$f(x) = \arctan x,$	$x_0 = 1,1,$	$m = 1,$
b)	$f(x) = \arctan x,$	$x_0 = 1,5,$	$m = 1,$
c)	$f(x) = \cos x - 1,$	$x_0 = 1,$	$m = 1,$
d)	$f(x) = \cos x - 1,$	$x_0 = 1,$	$m = 2,$
e)	$f(x) = \cos x - 1,$	$x_0 = 1,$	$m = 3,$
f)	$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}},$	$x_0 = 0,1,$	$m = 1,$
g)	$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}},$	$x_0 = 0,1,$	$m = 2,$
h)	$f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}},$	$x_0 = 0,1,$	$m = 10.$

(10 Punkte)

Informationen zur Klausur:

Hauptklausur:	Samstag, 5. Februar 2005, 9:00 s.t. im Wolfgang-Paul-Hörsaal der Physik, Kreuzbergweg
Nachklausur:	Montag, 4. April 2005, 9:00 s.t. im Kleinen Hörsaal der Mathematik, Wegelerstr. 10
Bearbeitungsdauer:	jeweils 180 Minuten
Mitzubringen sind:	Stifte, leeres DIN A4-Papier, Studenten- und Personalausweis

Sonstige Hilfsmittel sind nicht zugelassen.