Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 12

Ausgabe: 6.1.2005, Abgabe der Lösungen: 13.1.2005, 10:10

Aufgabe 43:
Betrachte nocheinmal die Matrix A aus Aufgabe 40. Dort und in Aufgabe 41 wurde gezeigt, dass die Spektralradien der Iterationsmatrizen des Jacobiverfahrens und des SOR-Verfahrens mit optimalem Relaxationsparameter durch

$$\rho_{\mathrm{J}} = \cos \frac{\pi}{m+1} \qquad \text{und} \qquad \rho_{\mathrm{SOR}} = \left(\frac{\cos \frac{\pi}{m+1}}{1 + \sin \frac{\pi}{m+1}} \right)^2$$

gegeben sind.
a) Zeige, dass für $m \to \infty$ gilt:

$$\rho_{\mathrm{J}} = 1 - \frac{\pi^2}{2(m+1)^2} + \mathcal{O}(m^{-4}), \qquad \ln \rho_{\mathrm{J}} = \frac{-\pi^2}{2(m+1)^2} + \mathcal{O}(m^{-4}), \qquad \ln \rho_{\mathrm{SOR}} = \frac{-2\pi}{m+1} + \mathcal{O}(m^{-3}).$$

b) Bestimme die Anzahl κ der Jacobi-Iterationen, die erforderlich sind, um für große m den Fehler um den gleichen Faktor zu reduzieren wie ein Schritt des SOR-Verfahrens es tut. Zeige, dass das Jacobi-Verfahren für große m mehr als m-mal so viele Iterationen wie das SOR-Verfahren benötigt. (10 Punkte)

Aufgabe 44:
Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix, und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Definiere

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x.$$

a) Zeige, dass f strikt konvex ist. Zeige, dass f auf jedem affin linearen Unterraum $V = v + U$ genau ein Minimum besitzt, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum ist.
Gemäß Vorlesung sieht ein Schritt des CG-Verfahrens folgendermaßen aus:

1) Bestimme $g_k = \nabla f(x_k) = A x_k - b$.
2) Bestimme $d_k \in \operatorname{span}\{d_{k-1}, g_k\} \setminus \{0\}$, so dass $d_{k-1}^T A d_k = 0$.
3) Bestimme x_{k+1} als Minimierer von f über $x_k + \operatorname{span}\{d_k\}$.

Im folgenden werden zwei äquivalente Charakterisierungen von x_{k+1} bestimmt.
b) Zeige, dass x_{k+1} der (nach a) eindeutig bestimmte) Minimierer von f über $x_k + \operatorname{span}\{d_{k-1}, g_k\}$ ist.
c) Zeige, dass x_{k+1} sich durch zweifache eindimensionale Minimierung ohne Orthogonalisierung ergibt: Sei y_k der (eindeutig bestimmte) Minimierer von f über $x_k + \operatorname{span}\{g_k\}$, dann ist x_{k+1} der (eindeutig bestimmte) Minimierer von f über $y_k + \operatorname{span}\{y_k - x_{k-1}\}$. (10 Punkte)
Bemerkung: Gemäß Konstruktion in der Vorlesung ist x_{k+1} auch der eindeutige Minimierer von f über $x_k + \operatorname{span}\{d_0, \ldots, d_k\}$.

Aufgabe 45:
Betrachte das Gradientenverfahren zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $a > 1$ eine Konstante ist.
a) Der Startvektor sei $x_0 = (a, 1)^T$. Bestimme die erste Suchrichtung g_0, den ersten Skalar α_0 sowie die erste Iterierte x_1.
b) Bezeichne $x_i = (x_i^1, x_i^2)$ die i-te Iterierte. Zeige

$$x_{i+1}^1 = \rho x_i^1, \qquad x_{i+1}^2 = -\rho x_i^2.$$

Wie lautet ρ?

c) Bestimme die Kondition $\text{cond}_2(A)$ der Matrix A. Zeige, dass die Abschätzung

$$\|x_i - A^{-1}b\|_A \leq \left(\frac{\text{cond}_2(A) - 1}{\text{cond}_2(A) + 1}\right)^i \|x_0 - A^{-1}b\|_A$$

der Konvergenzgeschwindigkeit aus der Vorlesung scharf ist: Für die Iterierten dieser Aufgabe liegt Gleichheit vor.

d) Zeige:

$$g_{i+1}^T g_i = 0 \qquad \text{und} \qquad g_{i+2} = \beta_i g_i.$$

Wie lautet β_i? (10 Punkte)

Bemerkung: Hieraus erkennt man, dass die Optimierung in Richtung g_i bereits im darauf folgenden Schritt verloren geht, da im $(i+2)$-ten Schritt in dieselbe Richtung optimiert wird wie schon zuvor im i-ten Schritt. Falls der Startwert x_0 nicht auf einer Hauptachse der durch $x^T Ax = \text{const}$ beschriebenen Ellipsen liegt, so kann man bei exakter Rechnung in endlich vielen Schritten nicht die exakte Lösung des Problems berechnen. Vergleiche hierzu das Verfahren der konjugierten Gradienten (CG).

Aufgabe 46:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix, und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Wie in Aufgabe 44 definiere

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{2} x^T Ax - b^T x.$$

Zu einem Startvektor $x_0 \in \mathbb{R}^n$ betrachte das folgende Suchrichtungsverfahren: Für $k = 1, 2, \ldots, n$ bestimme $\tau_k \in \mathbb{R}$ so, dass $f(x_{k-1} + \tau_k e_k)$ minimal ist, und setze $x_k = x_{k-1} + \tau_k e_k$. Hierbei bezeichnet e_k den k-ten Einheitsvektor.

Zeige, dass dieses Verfahren äquivalent zu einem Schritt des Gauß-Seidel-Verfahrens zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ ist. (10 Punkte)