Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 11

Ausgabe: 23.12.2004, Abgabe der Lösungen: 6.1.2005, 10:10

Aufgabe 41:
Die Matrix reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei zerlegt in $A = D + L + R$, wobei L und R linke untere bzw. rechte obere Dreiecksmatrizen mit verschwindender Diagonale sind. Die Diagonalmatrix D sei ebenfalls regulär. Ferner sei A konsistent geordnet, d.h. die Eigenwerte von $J_\alpha = D^{-1}(\alpha L + \alpha^{-1} R)$ seien unabhängig von $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ferner habe $J = J_1$ nur reelle Eigenwerte, die betragsmäßig kleiner als 1 seien. Unter diesen Voraussetzungen lässt sich der optimale Relaxationsparameter für das SOR-Verfahren ermitteln (Young, 1950). Gesucht ist also

$$\omega_{\text{opt}} = \arg\min_{\omega\in\mathbb{R}} \rho(M_\omega),$$

wobei

$$M_\omega = I - \omega(D + \omega L)^{-1} A = (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega R]$$

die Iterationsmatrix des SOR-Verfahrens bezeichnet.
Gemäß Vorlesung kann das SOR-Verfahren nur konvergieren, wenn $\omega \in (0, 2)$ ist. Es genügt also, sich im folgenden auf dieses Intervall zu beschränken.
a) Zeige

$$(I + \omega D^{-1} L)(\lambda I - M_\omega) = (\lambda + \omega - 1)I + \lambda\omega D^{-1} L + \omega D^{-1} R.$$

b) Zu $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sei μ definiert durch

$$\mu\omega\sqrt{\lambda} = \lambda + \omega - 1. \tag{$*$}$$

Hier und im folgenden bezeichnet $\sqrt{\lambda}$ die komplexe Quadratwurzel von λ, deren Argument in $[0, \pi)$ liegt. Zeige

$$\det(\lambda I - M_\omega) = \left(\sqrt{\lambda}\omega\right)^n \det\left(\mu I - J_{-\sqrt{\lambda}}\right).$$

c) Zeige, dass $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ genau dann ein Eigenwert von M_ω ist, wenn μ gemäß $(*)$ ein Eigenwert von J ist.
d) Zeige, dass die Lösungen $\sqrt{\lambda_1(\mu)}$ und $\sqrt{\lambda_2(\mu)}$ der in $\sqrt{\lambda}$ quadratischen Gleichung $(*)$ durch

$$\sqrt{\lambda_1(\mu)} = \frac{1}{2}\left(\omega\mu + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega-1)}\right) \qquad \text{und} \qquad \sqrt{\lambda_2(\mu)} = \frac{1}{2}\left(\omega\mu - \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega-1)}\right)$$

gegeben sind.
e) Zeige für $\mu \geq 0$:

$$|\lambda_1(\mu)| = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\omega\mu + \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega-1)}\right)^2 & \text{falls } \mu^2 \geq \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}, \\ \omega - 1 & \text{falls } \mu^2 < \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}, \end{cases}$$

$$|\lambda_2(\mu)| = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\omega\mu - \sqrt{\omega^2\mu^2 - 4(\omega-1)}\right)^2 & \text{falls } \mu^2 \geq \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}, \\ \omega - 1 & \text{falls } \mu^2 < \frac{4(\omega-1)}{\omega^2}. \end{cases}$$

f) Zeige für $\tilde{\mu} \geq \mu \geq 0$:

$$|\lambda_1(\mu)| \geq |\lambda_2(\mu)| \qquad \text{und} \qquad |\lambda_1(\tilde{\mu})| \geq |\lambda_1(\mu)|.$$

g) Zeige: Ist μ ein Eigenwert von J, so ist auch $-\mu$ ein Eigenwert von J. Hinweis: Betrachte J_1 und J_{-1}.
h) Zeige: Ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert von M_ω, so gilt $\omega = 1$.
i) Zeige

$$\rho(M_\omega) = |\lambda_1(\rho(J))|.$$

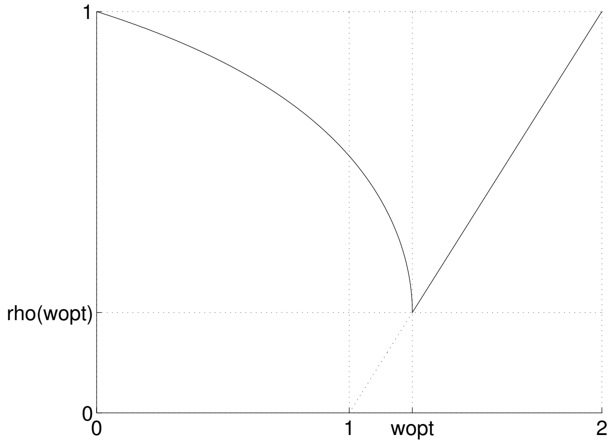
Beachte, dass der mögliche Eigenwert $\lambda = 0$ von M_ω gesondert behandelt werden muss.
j) Zeige

$$\rho(M_\omega) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(\omega\rho(J) + \sqrt{\omega^2\rho(J)^2 - 4(\omega-1)}\right)^2 & \text{für } 0 < \omega \leq \omega_{\text{opt}}, \\ \omega - 1 & \text{für } \omega_{\text{opt}} \leq \omega < 2, \end{cases}$$

wobei der optimale Relaxationsparameter ω_{opt} durch

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}}.$$

gegeben ist.
Zur Veranschaulichung der Graph von $\omega \mapsto \rho(M_\omega)$ für $\rho(J) = 0.8$:



k) Zeige, dass die Konvergenzraten (genau: der Spektralradius der jeweiligen Iterationsmatrix) des Jacobi-Verfahrens, des Gauß-Seidel-Verfahrens sowie des SOR-Verfahrens mit optimalem Relaxationsparameter ω_{opt} gegeben sind durch

$$\begin{aligned}
\rho_{\text{J}} &= \rho(J), \\
\rho_{\text{GS}} &= \rho(J)^2, \\
\rho_{\text{SOR}} &= \rho(M_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1 = \left(\frac{\rho(J)}{1 + \sqrt{1 - \rho(J)^2}} \right)^2.
\end{aligned}$$

Beurteile die Verfahren im Hinblick auf Konvergenzgeschwindigkeit. (30 Punkte)

Natürlich gibt es für diese Aufgabe auch Punkte, wenn nur Teilschritte gelöst sind!

Aufgabe 42:
Wie in Aufgabe 40 sei die Blockmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n = m^2$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Ferner definiere für jedes $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$J_\alpha = \alpha D^{-1} L + \frac{1}{\alpha} D^{-1} R,$$

wobei $B = D + L + R$ die Zerlegung von B in eine Diagonalmatrix D sowie eine rechte obere Dreiecksmatrix R und eine linke untere Dreiecksmatrix L mit verschwindender Diagonale sei.
a) Finde eine Matrix $S_\alpha \in \mathbb{R}^{m \times m}$, so dass

$$S_\alpha J_1 S_\alpha^{-1} = J_\alpha.$$

Zeige, dass B konsistent geordnet ist.
b) Zeige, dass A konsistent geordnet ist. (10 Punkte)