Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05

Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 10

Ausgabe: 16.12.2004, Abgabe der Lösungen: 23.12.2004, 10:10
Abgabe der Programmieraufgabe: 10.-14.1.2005, genauer Termin nach Vereinbarung.

Aufgabe 37:
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei gegeben durch $A_{ii} = 1$ und $A_{ij} = a$ für $i \neq j$, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.
a) Bestimme die Iterationsmatrix M des Gesamtschrittverfahrens zu A. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren von A und M.
b) Für welche Parameter $a \in \mathbb{R}$ ist A positiv definit und für welche regulär?
c) Sei nun $a \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass A regulär ist. Für welche a konvergiert das Gesamtschrittverfahren für jeden Startwert gegen eine Lösung des linearen Gleichungssystems? (10 Punkte)

Aufgabe 38:
Zeige folgenden Satz der Vorlesung:
Die symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitze nur positive Eigenwerte. Der kleinste und der größte Eigenwert von A seien mit $\lambda_{\min}$ und $\lambda_{\max}$ bezeichnet. Dann konvergiert das Richardson-Verfahren

$$x^{(m+1)} = x^{(m)} - \vartheta(Ax^{(m)} - b)$$

zum linearen Gleichungssystem $Ax = b$ für reelle Parameter ϑ genau dann, wenn

$$0 < \vartheta < \frac{2}{\lambda_{\max}}.$$

Die optimale Konvergenzrate wird für

$$\vartheta_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}} \qquad \text{mit} \qquad \rho(M_{\vartheta_{\text{opt}}}) = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

erreicht, wobei M_ϑ die Iterationsmatrix zum Parameter ϑ bezeichnet. (10 Punkte)

Aufgabe 39:
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genüge dem folgenden schwachen Zeilensummenkriterium:

$$0 < \sum_{k\neq 1} \frac{|a_{1k}|}{|a_{11}|} < 1 \qquad \text{und} \qquad \sum_{k\neq j} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} \leq 1$$

für $j = 2,\ldots,n$. Ferner gebe es zu jedem $j = 2,\ldots,n$ ein k mit $k < j$ und $a_{jk} \neq 0$. Zeige, dass das Gauss-Seidel-Verfahren in diesem Fall konvergiert und dass die Kontraktion q der Abschätzung

$$q = \max_j q_j < 1$$

genügt, wobei die q_j rekursiv durch

$$q_j = \sum_{k=1}^{j-1} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|} q_k + \sum_{k=j+1}^{n} \frac{|a_{jk}|}{|a_{jj}|}$$

definiert sind.
Hinweis: Nutze die ∞-Norm. (10 Punkte)

Aufgabe 40:
Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $n = m^2$ sei gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

a) Verifiziere, dass die Eigenvektoren von A durch

$$v_{kl} = (v_{kl}^{11}, v_{kl}^{12}, \ldots, v_{kl}^{1m}, v_{kl}^{21}, \ldots, v_{kl}^{2m}, v_{kl}^{31}, \ldots, v_{kl}^{mm})^T$$

mit

$$v_{kl}^{ij} = \sin\frac{ik\pi}{m+1}\sin\frac{jl\pi}{m+1}$$

für $k, l = 1, \ldots, m$ gegeben sind. Bestimme die zugehörigen Eigenwerte.
b) Bestimme die Eigenvektoren und die Eigenwerte der Iterationsmatrix

$$M = I - D^{-1}A$$

des Jacobiverfahrens zu A, wobei D die Diagonale von A bezeichnet. Bestimme den zugehörigen Spektralradius $\rho(M)$.
Bemerkung: Die Matrix A entsteht bei der Diskretisierung des Laplaceoperators und spielt bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen eine wichtige Rolle. (10 Punkte)

Programmieraufgabe 3:
Schreibe ein C-, C++- oder Javaprogramm, das das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe des SOR-Verfahrens löst, wobei die Matrix A wie in Aufgabe 40 gegeben ist. Der Relaxationsparameter ω soll frei wählbar sein. Es sollen soviele Iterationen ausgeführt werden, bis die 2-Norm des Residuums um den Faktor 10000 verringert worden ist.
Hinweis: Es ist sinnvoll, die Dünnbesetztheit von A zu nutzen!
Teste das Programm anhand der rechten Seite $b = (1, 1, \ldots, 1)^T$ und des Startwerts $x^{(0)} = 0$ für die unten angegebenen Matrixgrößen m und Relaxationsparameter ω. Bestimme experimentell bis auf zwei Nachkommastellen genau den optimalen Relaxationsparameter ω_{opt}. Miss jeweils die Anzahl der Iterationen und fülle die Tabelle aus.

m	Anzahl der Iterationen					ω_{opt}
	$\omega = 1.0$	$\omega = 1.6$	$\omega = 1.8$	$\omega = 1.9$	$\omega = \omega_{\text{opt}}$	
10						
20						
40						
80						
160						

(10 Punkte)