Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 9

Ausgabe: 9.12.2004, Abgabe der Lösungen: 16.12.2004, 10:10

Aufgabe 33:
Durch

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

sei eine Iterationsvorschrift definiert.
a) Bestimme die kleinste Konstante $L \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x-y|.$$

Ist der Banachsche Fixpunktsatz hier anwendbar?
b) Zeige, dass die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert. (10 Punkte)

Aufgabe 34:
a) Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, und seien $\|\cdot\|_n$ und $\|\cdot\|_m$ beliebige Normen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$. Zeige, dass für jede differenzierbare Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{R}^m$ und alle $x, y \in E$ gilt:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_m \leq \sup_{z\in E} \|\Phi'(z)\|_{n,m} \|x-y\|_n$$

b) Finde ein Gegenbeispiel zu a), falls E zusammenhängend, aber nicht konvex ist.
c) Zeige, dass das System

$$\begin{aligned} \cos x - 6x + 2y &= 0 \\ \sin x + xy^2 - 8y &= 0 \end{aligned}$$

auf $[0,1]^2$ eine eindeutige Lösung besitzt. (10 Punkte)

Aufgabe 35:
a) Zeige, dass für jede Norm N des $\mathbb{C}^n$ und jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt:

$$\rho(A) \leq \|A\|_{N,N}.$$

Hierbei bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius der Matrix A.
b) Konstruiere zu jedem $\varepsilon > 0$ und jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Norm N des $\mathbb{C}^n$, so dass

$$\|A\|_{N,N} \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

Kann N unabhängig von A konstruiert werden?
Hinweis: Transformiere A auf Jordan-Normalform. (10 Punkte)

Aufgabe 36:
Sei $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und sei $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ein Startwert. Die Folge $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ sei durch die Iterationsvorschrift $x^{(k+1)} = Tx^{(k)}$ definiert. Zeige, dass $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann für jeden beliebigen Startwert konvergiert, wenn für jeden Eigenwert λ von T gilt:

a) $|\lambda| < 1$ oder

b) $\lambda = 1$, und 1 ist kein verallgemeinerter Eigenwert von T. (10 Punkte)