Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 8

Ausgabe: 2.12.2004, Abgabe der Lösungen: 9.12.2004, 10:10

Aufgabe 29:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix. Beweise die Moore-Penrose-Axiome

$$(A^+A)^T = A^+A, \qquad (AA^+)^T = AA^+, \qquad A^+AA^+ = A^+, \qquad AA^+A = A$$

und zeige

$$(A^+)^+ = A.$$ (10 Punkte)

Aufgabe 30:
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Singulärwertzerlegung $A = USV^T$ von A.
b) Berechne die Pseudoinverse A^+ von A und berechne damit die Lösung x des linearen Ausgleichsproblems

$$\|Ax - b\|_2 \to \min.$$ (10 Punkte)

Aufgabe 31:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, und seien

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_p > 0$$

die Singulärwerte von A.
a) Zeige, dass die Singulärwerte von A genau die Wurzeln aus den positiven Eigenwerten von A^TA sind. Insbesondere gilt

$$\lambda_{\max}(A^TA) = \sigma_1^2 \qquad \text{und} \qquad \lambda_{\min}(A^TA) = \sigma_p^2,$$

wobei $\lambda_{\max}$ den größten und $\lambda_{\min}$ den kleinsten von Null verschiedenen Eigenwert bezeichnet.
b) Sei rang $A = n$. Zeige

$$\|A\|_{2,2}\,\|(A^TA)^{-1}A^T\|_{2,2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_p} = \mathrm{cond}_2 A \qquad \text{und} \qquad \|(A^TA)^{-1}\|_{2,2}\,\|A\|_{2,2}^2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_p^2} = (\mathrm{cond}_2 A)^2.$$

c) Zeige

$$\sigma_1 = \max\left\{ \frac{x^TAy}{\|x\|_2\|y\|_2} \,:\, x \neq 0, y \neq 0 \right\}.$$ (10 Punkte)

Aufgabe 32:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und bezeichne $\mathcal{P}_k$ den Raum aller Polynome vom Grad $\leq k$. Betrachte das lineare Ausgleichsproblem

$$\|f - p\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{R})} := \int_0^1 |f(t) - p(t)|^2 \,\mathrm{d}t \longrightarrow \min$$

unter allen $p \in \mathcal{P}_k$.
a) Leite die zugehörigen Normalengleichungen her, d.h. das lineare Gleichungssystem, denen die Koeffizienten $x \in \mathbb{R}^{k+1}$ des Lösungspolynoms $p(t) = \sum_{i=1}^{k+1} x_i t^{i-1}$ notwendigerweise genügen müssen.
b) Zeige, dass die Hilbertmatrix

$$H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\ldots,k+1}$$

positiv definit ist. Hinweis: Betrachte das Integral $\|p\|^2_{L^2((0,1),\mathbb{R})}$.
c) Zeige, dass das Ausgleichsproblem genau ein Minimum besitzt. (10 Punkte)