Praktische Mathematik I

Wintersemester 2004/05
Prof. Dr. Karl Scherer, Dr. Marcel Arndt

Aufgabenblatt 7

Ausgabe: 25.11.2004, Abgabe der Lösungen: 2.12.2004, 10:10

Aufgabe 25:
a) Aus der linearen Algebra ist das Gram-Schmidt-Verfahren zur Orthonormalisierung bekannt: Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis eines n-dimensionalen Vektorraums V, $n \in \mathbb{N}$, mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der Norm $\| \cdot \|$. Eine Orthonormalbasis $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von V kann folgendermaßen rekursiv bestimmt werden:

$$\tilde{w}_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle \, w_i, \qquad w_k := \frac{\tilde{w}_k}{\|w_k\|}.$$

Stelle die Gram-Schmidt-Orthonormalisierung als Verfahren zur QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dar.
b) Leider ist das o.g. Verfahren numerisch nicht immer stabil, was im folgenden untersucht werden soll. OBdA sei $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. Der Vektor $\tilde{w}_2$ wird dann bestimmt durch

$$\tilde{w}_2(\rho) := v_2 - \rho v_1 \qquad \text{mit} \qquad \rho = \rho_0 := \langle v_1, v_2 \rangle \, .$$

Wird ρ z.B. durch Rundungsfehler gestört, so weicht auch der Winkel

$$\alpha(\rho) = \arccos \frac{\langle v1, \tilde{w}_2(\rho) \rangle}{\|\tilde{w}_2(\rho)\|}$$

zwischen v_1 und $\tilde{w}_2$ von $\pi/2$ ab. Berechne die relative Kondition von α an der Stelle ρ_0 und untersuche, für welche v_1 und v_2 das Problem schlecht konditioniert ist. (10 Punkte)

Aufgabe 26:
An einem Quader werden die Längen seiner Kanten und die Umfänge senkrecht zu seinen ersten beiden Kanten gemessen. Die fehlerbehafteten Messwerte betragen:

Kante 1: 26 cm	Umfang senkrecht zu Kante 1: 124 cm
Kante 2: 38 cm	Umfang senkrecht zu Kante 2: 115 cm
Kante 3: 31 cm	

Wie groß sind die ausgeglichenen Kantenlängen des Quaders nach der Methode der kleinsten Quadrate? (10 Punkte)

Aufgabe 27:
Zeige, dass die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ eindeutig ist, wenn man zusätzlich fordert, dass die Diagonalelemente von R reell und positiv sind. (10 Punkte)

Aufgabe 28:
Beweise die folgende Verallgemeinerung des Satzes zur orthogonalen Projektion auf einen Unterraum aus der Vorlesung: Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Norm $\| \cdot \|$, sei $U \subset V$ eine konvexe Teilmenge, und sei $u^* \in U$. Dann gilt

$$\|u^* - v\| = \min_{u \in U} \|u - v\|$$

genau dann, wenn

$$\langle v - u^*, u^* - u \rangle \geq 0$$

für alle $u \in U$ ist. (10 Punkte)